外微分形式の理論

―積分不変式―

Titre original:
LEÇONS SUR LES INVARIANTS INTEGRAUX
Auteur:
ELIE CARTAN
Editeur:
HERMANN
Date:
1922

外微分形式の理論

—積分不変式—

エリー・カルタン

矢野健太郎訳

白　水　社

目　　次

緒　　　言

本書は，パリ大学理学部において，1920年から1921年にわたる学年の後半期に行なった講義を再録したものである。

積分不変式の理論は，H. Poincaré によって創始され，彼によってその「天体力学の新しい方法」第3巻のなかに述べられている。

パリ科学院報告へ提出した二つの覚え書（1902年6月16日および30日）において著者は，与えられた変換を許容する微分方程式の研究に当たって，ある種の微分形式を考えるよう導かれた。そして著者はこれを**積分形式**と呼んだ。これは，与えられた微分方程式の第一積分とその微分のみを用いて表わし得られるという性質で特長づけられるものであった。著者が，一方においては任意定数のみに関係する特性曲線（Cauchy の特性曲線）を許容する偏微分方程式系の積分方法を創始し，他方においては有限次元および無限次元連続変換群の構造の理論を確立し得るに至ったのは，これと同様の考えにしたがってその研究を深めることによってである。

さて，積分形式の概念は，本質的には積分不変式のそれと異なるものでないことが見いだされる。本書の基礎になっているのは，これら二つの概念の比較対照である。

たとえば，独立変数 t の三つの未知関数 x, y, z に関する，三つの連立一階微分方程式を考えよう。これらは，一つの動点の無限に多くの軌道を定義するものであるとみなし得られる。たとえば $\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz+\mathrm{H}dt$ のような微分形式は，動点の**状態**（x, y, z, t）と，それに無限に近い**状態**（$x+dx, y+dy, z+dz, t+dt$）とに結びつけられた一つの**量**であると考えることができる。この形式が積分形式である（または本講義で採用さ

れる用語法によれば不変形式である）ということは，明らかに，この量が第一の状態を含む軌道と，第二の状態を含むこれに無限に近い軌道とにのみ関係するということを意味している。言いかえれば不変形式は，二つの状態 (x, y, z, t)，$(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$ をそれらの軌道の上で任意に移動させてもその値を変えない。したがって，もし軌道の一媒介変数の連続的な一系を考えて，これら軌道上の動点が同一の瞬間 t にとる位置の軌跡である曲線の弧にそって積分 $\int Pdx+Qdy+Rdz$ をとれば，この積分は t に無関係である。これは H. Poincaré の意味における積分不変式である。逆に，H. Poincaré の積分不変式 $\int Pdx+Qdy+Rdz$ から，それに対応する不変形式 $Pdx+Qdy+Rdz+Hdt$ にさかのぼる非常に簡単な方法が存在する。

これらの考察は，一次微分形式に限るものではない。一重または多重積分記号内に置かれ得るすべての不変微分形式は，独立変数の微分を含む項を取り去れば，H Poincaré の意味の積分不変式を与える(1)。

結局 H. Poincaré の積分不変式における積分記号中の量は，不変微分形式である項をおとしたものに他ならない。この項をつけ加えた積分の不変性は，同時刻であるとないとにかかわらず，任意の状態にわたって積分をとっても保存されている。

このように積分不変式と，不変微分形式の二つの概念の間の対照から得られる結果は，非常に数が多い。第一に，積分不変式の形成，およびいくつかの積分不変式から他のそれを導くことに関するすべての性質はそれ自身明らかになる。微分方程式の積分への応用に関しても同様である。

力学の原理に関係のあるもう一つの他の結論は，是非これを指摘してお

(1) R. Hargreaves 氏はすでに，Transactions of the Cambridge Philosophical Society（第21巻，1912）に発表された論文中で，独立変数の微分を含む積分を考えている。しかし彼の見地は本文の見地と全く異なり，しかも彼は，独立変数につねに特別な役割を演じさせている。

かなければならない。H. Poincaré は，力学の一般方程式が，一つの一次（相対）積分不変式，すなわち

$$\int p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_n\delta q_n \tag{1}$$

を許容するという性質をもつことを証明した。ただしここに q_i および p_i は Hamilton の正準変数を示すものとする。もし上の積分記号 $\int$ 内の微分形式を完成すれば，積分不変式は

$$\int p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_n\delta q_n-\mathrm{H}\delta t \tag{2}$$

という形をとる。ただしここに H は Hamilton の関数である。このように，考えている質点系の運動量（$p_1, p_2, \cdots, p_n$）の他に，そのエネルギー H の現われるのがみられる。こうして記号 $\int$ 内の形式は，非常に重要な力学的意味を得るに至る。これに「運動量・エネルギー」テンソルという名を与えることができる(1)。Hamilton の基本作用量は，一つの軌道にそって考えられたこのテンソルに他ならない。こうして作用量の概念は，運動量およびエネルギーの概念に結びつけられる。

さらにそれ以上のことがある。運動の微分方程式は，積分不変式 (2) を許容するばかりでなく，さらにこの性質をもつ唯一の微分方程式である。したがって力学の基礎につぎの原理をおくことができる。そしてこれに「運動量およびエネルギー保存の原理」という名を与えることができるであろう。すなわち

（完全ホロノーム束縛を受ける，力の関数から導かれる力を受ける）一つの質点系の運動は，時間，位置の媒介変数，速度の媒介変数の間の一階微分方程式によって支配される。そしてこれらの微分方程式は，この系の

(1) 上に示した積分は，Hamilton の作用量の積分の変分を考える場合にごく自然に現われてくる。この形式はすでにこの見地から指摘されている。さらに本講義でもこの形式はこの方法で導入される。

状態の任意の閉じた一次元の連続的な系列にわたる「運動量・エネルギー」テンソルの積分が，各軌道にそってこれらの状態を任意に移動させてもその値を変えないという性質で特長づけられる。

この陳述において状態ということばは，空間におけるこの系の位置，それが考えられている瞬間，そしてその瞬間における速度を定義する量の集まりを示すものである。

以上の陳述は，たとえばHamiltonの最小作用の原理よりもより抽象的で，より非直観的である。しかしながら以上の命題はそれ以上の利点をもっているのである。これを指摘しておくことは大切である。Lagrange の方程式は，力学の法則に，空間に対して採用された標定法とは無関係な形を与えることを可能ならしめる。これがLagrangeの方程式を重要なものとしているのである。しかしながら，そこでは時間がなお特殊な地位を保っている。これに反して運動量およびエネルギー保存の原理は，宇宙(時空）に対して採用された標定法とは独立な形を力学の法則に与える。もしこの系の位置の媒介変数と時間に対して同時に変数の変換を行なった場合に，これから運動の方程式を導き得るためには，新しい座標系において「運動量・エネルギー」テンソルがとる形を知れば十分である。こうしてわれわれは，すべての力学理論のしたがうべき，そして事実相対論的力学自身がそれにしたがうところの，一つのシェーマを得る。

このシェーマは，有限個の媒介変数に関係する質点系にのみあてはまることに注意することが大切である。

本書においては，積分不変式の理論の数多くの応用を割愛した。とくに天体力学において非常に重要な，三体問題の週期解，Poisson に負う安定性の理論に関係のある応用はことさらに除外した。そして主に微分方程式の積分に関する応用にこれを限った。そうしたとしてもまだこの問題は，ただたんに口火をつけただけにすぎない。

しかしながら，この問題はこれをきりはなしては考えられないことを示すのに努力した。もしこの問題を，積分不変式のみでなく，さらに，与えられた微分方程式に対する不変な Pfaff の方程式，そしてさらにこれらの微分方程式を保存する無限小変換の考察がそのなかにはいってくるさらに一般な問題の一つの面とみなすのでなければ，人はただ問題を狭くするにすぎないであろう。この問題の完全な解説は，本講義の範囲をはるかに越えるものであろうし，さらにそのうえ連続群の理論に関するいくらかの知識を必要とするであろう。したがって，与えられた微分方程式の積分に施され，結局これらの積分に関してすでに知られているすべての情報を不変にする，変換群 G によって演ぜられる基本的な役割を二，三の機会に示すにとどめた(1)。すべての微分方程式系は，それぞれが単純群 G に応用する代表的な系に直される。もしこの単純群が有限次元の場合には，とくに S. Lie および E. Vessiot によって研究された微分方程式系を得る。E. Vessiot 氏はこれに Lie 系という名を与えている。これは，必要とあらば補助の未知関数を添加することによって，これらの微分方程式は未知関数と同数個の一次積分不変式を許容するという意味において，積分不変式の理論と関係がある。これらをこの最後にのべた見地から考察することによって，本講義の第15章における二，三の一般的な指示が得られる。

もし単純群Gが無限次元であり，これが n 変数の最も一般な群であるという場合を除けば（この場合には，われわれは対応する微分方程式系に対して何も知らない），この群は，最小次数の積分不変式（Jacobi の乗式の理論），または一次相対積分不変式（正準形へ直し得る方程式の理論），または不変 Pfaff 方程式（一階偏微分方程式に直し得る方程式）のいずれかを許容する。第11～14章は，これら古典的な理論のために書かれたものである。

---

(1)　E. Cartan: Les sous-groups des groupes continus de transformations, Ann. Ec. Norm. (3), 第25巻 (1908), 57頁～144頁（第1章）参照。

積分不変式の概念は，H. Poincaré の見地であり，結局本講義でとられる見地であるところの，通常の見解とはやや異なる見地からこれを考えることもできる。一つの微分方程式系に結びつけられた多重積分で，それに対して不変な性質をもったものを考えるかわりに，これらを，それに対して積分が不変であるところの変換群に結びつけられたものと考えることもできる。もっともこれら二つの見地の間には密接な関係がある。後者の見地は S. Lie によってとられたものであり，彼にとってはしばらくの間唯一の真なものと思われていたのである。ここでもなお，積分不変式の概念は非常に重要な役割を演じている。なぜなら，すでに著者がそれを示したように[(1)]，すべての変換群は，必要とあれば補助変数をつけ加えることによって，いくつかの一次積分不変式を許容する変換の集合として定義され得るからである。積分不変式の概念のこの面は，本講義においては全部これを割愛した。

多くの章を，多重積分記号内に現われる微分形式の計算法則にあてた。Goursat 氏はこれらの形式に，記号的表現という名を与えている。私はこれらを**外積微分形式**，または簡単に**外微分形式**と呼ぶことを提唱する。なぜならこれらの形式は，H. Grassmann の外積の法則にしたがうからである。同様に私は，$p-1$ 次元の閉集合体にわたる $p-1$ 次の多重積分から，これで囲まれた p 次元の集合体にわたる，p 次のこれと等しい多重積分に移ることを許す演算を**外微分**とよぶことを提議する[(2)]。積分記号 $\int$ 内の微分形式の係数が一階の偏微分を許容する場合には古典的な微分演算になるこの演算は，これが偏微分を許容しない場合にも意味を保持し得る。この点に関しては，まだ組織的には研究されていないが，十分その価値の

(1)　E. Cartan: Sur la structure des groupes infinis de transformations; Ann. Ec. Norm. (3), 第21巻 (1904), 153頁～206頁; 第22巻 (1905), 219頁～308頁。

(2)　これは Goursat 氏の「演算D」である。

ある興味ある種々の問題が起こる。本書は，もっとも非常に概論的ではあるが，積分不変式の理論の変分法との関係，および光学の原理との関係に関する二つの章で終わっている。

読者は，本書の最後に，必ずしも完璧であると主張するわけではないが，積分不変式の理論に関する主な論文と書物の表を見いだされるであろう。Jacobi の乗式，正準方程式，一階偏微分方程式の古典理論に関する論文は，それらが直接積分不変式の理論に関係のある場合にのみ引用した。

Le Chesnay において，1921年11月24日

第 1 章

Hamilton の最小作用の原理と「運動量・エネルギー」テンソル

I　自由質点の場合

1. われわれは解析力学全体を，質点系の運動の決定を変分法の問題の解決に帰着させる，一つの原理の上に樹立することができる。それは Hamilton の**最小作用の原理**である。われわれはまずこれを，一つの力の関数から導かれる力を受けている自由質点の場合に説明しよう。ここに力の関数Uは，点の直角座標 x, y, z と時間 t の関数である。

この簡単な場合には，Hamilton の原理はつぎのようにのべられる。

一つの質点を，瞬間 t_0 における与えられた位置(x_0, y_0, z_0)から，瞬間 t_1 における他の与えられた位置 (x_1, y_1, z_1) へ移すすべての可能な運動のうちで，実際の運動は

$$\mathrm{W}=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{U}\right]dt$$

で定義される積分を最小にするところのものである。

この式のなかで m は点の質量を，x', y', z' はその速度の成分を表わす。積分記号内の量は**基本作用量**と呼ばれる。そして積分 W は時間 (t_0, t_1) 内の**作用量**である。

この原理を証明するために，x, y, z を時間 t および任意の媒介変数 α の関数とみなし，x, y, z は，**α がどうあろうとも** $t=t_0$ に対しては x_0, y_0, z_0 になり，$t=t_1$ に対しては x_1, y_1, z_1 になるとして，α に一つの増分 $\delta\alpha$ を与えたと

きの W の変分を計算しよう。

まず

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left[m(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z')+\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z\right]dt$$

である。さて

$$\delta x'=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta\alpha=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha\right)=\frac{\partial(\delta x)}{\partial t}$$

であるから，δx, δy, δz は両端で0になることに注意して部分積分を行なえば

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt$$

が得られる。

両端で0になる t の関数 δx, δy, δz がどうあろうとも，$\alpha=0$ に対しては δW が0になることを望むならば，これに古典的な推論をあてはめて，$\alpha=0$ に対して

(1)
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z}$$

となることが必要かつ十分である。

これから，与えられた力の作用を受ける自由質点がとる運動は，質点の同じ初めの位置と同じ終りの位置に対応する無限に近いあらゆる可能な運動に対して積分Wの極値を実現し，さらにこれらの運動はこの性質をもつ唯一のものであることがわかる。

厳密にいえば，われわれは作用量の極値のみをうんぬんし得るのであって，最小について語ることはできない。なぜなら，第一変分 δW が0になるという条件は，最小に対する一つの必要条件であって十分条件ではないからである。

2.　ここでは基本作用量

$$\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]dt$$

は，運動の法則を簡潔な形で述べうるようにするために，純然たる計算の技巧として導入されているようにみえる。われわれは以下に Hamilton の原理を，やはり dx, dy, dz, dt の一次式が現われるのであるが，しかしすべての係数が簡単な力学的意味をもった，これと同値な他の原理で置きかえうることをみるであろう。

事実作用量 W に立ち戻ろう。しかし今度は，t_0 および t_1 はそれら自身媒介変数 α の関数であり，対応する関数 x_0，y_0，z_0，x_1，y_1，z_1 もまた α の関数であると仮定しよう。定積分の微分の操作をあてはめて $\delta\mathrm{W}$ を計算すれば

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{W}=&\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{U}\right]_{t=t_1}\delta t_1-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{U}\right]_{t=t_0}\delta t_0\\&+[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_1}-[mx'\delta x+my'\delta y+mz'\delta z]_{t=t_0}\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt\end{aligned}$$

が得られる。

さて

$$[\delta x]_{t=t_1}=\left[\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha,\quad \delta x_1=\left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]_{t=t_1}\delta t_1+\left[\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1}\delta\alpha,$$

したがって

$$[\delta x]_{t=t_1}=\delta x_1-x_1'\delta t_1$$

であることに注意しよう。

したがって $\delta\mathrm{W}$ を与える公式は

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\delta\mathrm{W}=&\,mx_1'(\delta x_1-x_1'\delta t_1)+my_1'(\delta y_1-y_1'\delta t_1)+mz_1'(\delta z_1-z_1'\delta t_1)\\&\qquad+\left[\frac{1}{2}m(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)+\mathrm{U}_1\right]\delta t_1\\&-\Big\{mx_0'(\delta x_0-x_0'\delta t_0)+my_0'(\delta y_0-y_0'\delta t_0)+mz_0'(\delta z_0-z_0'\delta t_0)\\&\qquad-\left[\frac{1}{2}m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)+\mathrm{U}_0\right]\delta t_0\Big\}\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z}-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt\end{aligned}\right.$$

となる。いま

$$
(3)\quad \begin{cases} \omega_\delta = mx'(\delta x - x'\delta t) + my'(\delta y - y'\delta t) + mz'(\delta z - z'\delta t) \\ \qquad + \left[\dfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{U}\right]\delta t \\ \quad = mx'\delta x + my'\delta y + mz'\delta z - \left[\dfrac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-\mathrm{U}\right]\delta t \end{cases}
$$

とおこう。

こうして導入される微分形式は，まず

$$mx',\quad my',\quad mz',$$

すなわち動点の**運動量**の成分，つぎに

$$\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-\mathrm{U},$$

すなわち**エネルギー** E を係数にもっている。

この記号をつかえば，われわれは

$$\delta \mathrm{W} = [\omega_\delta]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt$$

と書くことができる。

さて，一つの媒介変数 α に関係する実際の軌道の一系を考え，各軌道を α とともに変わる時間 $(t_0,\ t_1)$ 内に限ったと想像しよう。これら変わり得る軌道にそっての作用量の変分を与える公式は

$$\delta \mathrm{W} = (\omega_\delta)_1 - (\omega_\delta)_0$$

となる。最後にわれわれは，**軌道の管**，すなわちおのおのが時間 $(t_0,\ t_1)$ で限られた軌道の，閉じた一次の連続的な系列を考えていると仮定しよう。最初の軌道へ戻ってきた時の作用量の全変分は明らかに 0 である。したがって α に関して積分してわれわれは

$$\int (\omega_\delta)_1 = \int (\omega_\delta)_0$$

を得る。

3.　ここで，いま得られた結果を解釈するために，七つの量

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',\ t$$

の集合をこの質点の**状態**とよぶことに約束しよう。ここに最初の三つは点の位置を，つぎの三つはその速度を，最後の t は点の考えられている瞬間を定義するものである。一つの状態はこれを，一つの七次元の空間，**状態空間**中の一点とみなすことができる。一つの軌道は，点の実際の運動に対応する状態の系列，すなわち結局は微分方程式系

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x', & m\dfrac{dx'}{dt}=\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=y', & m\dfrac{dy'}{dt}=\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=z', & m\dfrac{dz'}{dt}=\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} \end{cases}$$

の解として定義され得る。

これによれば，状態空間の任意の閉曲線にそっての線積分

$$\int\omega_\delta=\int mx'\,\delta x+my'\,\delta y+mz'\,\delta z-\mathrm{E}\delta t$$

は，閉曲線を作る各状態を，この状態に対応する軌道にそって任意に移動させてもその値を変えない。

さらにまたつぎのように言うこともできる。軌道の任意の管が与えられた場合，その管を一回りする一つの閉曲線にそっての積分 $\int\omega_\delta$ は，この曲線には関係せず，管のみに関係する。

式 ω_δ は，四次元 $(x,\ y,\ z,\ t)$ の宇宙のベクトルの基本的な仕事とみせるのに注意することができる。このベクトルは，空間的成分として，運動量のふつうの三つの成分をもち，時間的成分として，エネルギーをもっているわけである。したがってこれを「運動量・エネルギー」テンソルとよぶことができる。このようにこれらの成分のおのおのは，一つの簡単な力学的意味をもっている。

4.　もし同時的な状態の一系を考えるならば，すなわちもし $\delta t=0$ と仮定するならば，積分 $\int\omega_\delta$ は

$$\int m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)$$

となる。この後者の見解をとるならば，われわれはつぎの定理を得る。

軌道の閉じた一系を考え，もしこれらの軌道の上に任意に与えられた同一の瞬間に対応する状態をとれば，こうして得られた状態の閉じた一系にわたる積分 $\int m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)$ は，時間に無関係である。

この定理は H. Poincaré に負うものである。H. Poincaré はこうして得られた性質を特長づけるために，一つの閉曲線にわたる積分

$$\int m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)$$

に積分不変式という名を与えている。

Poincaré のこの概念においては，エネルギーの概念ははいってこない。これは，同時的な閉じた状態の一系を考える代わりに，任意の閉じた状態の一系を考える場合には必然的にはいってくる。

「運動量・エネルギー」テンソルの積分 $\int\omega_\delta$ を，運動の微分方程式に対する**完全積分不変式**——または混合の恐れのない場合には単に**積分不変式**——とよぼう。したがって H. Poincaré の積分不変式は，ある特別な観点から考えられた「運動量・エネルギー」テンソルの完全積分不変式である。

同時的な状態の一系を考える代わりに，関係式

$$\delta x=x'\delta t,\quad \delta y=y'\delta t,\quad \delta z=z'\delta t$$

を満足する状態の一系を考えるならば，テンソル ω_δ は Hamilton の基本作用量

$$\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{U}\right]\delta t$$

になることは注目すべきである。したがって H. Poincaré の積分不変式と

Hamilton の作用量とは，これら二つの概念の間には一見なんらの関係もないようにみえるが，実は「運動量・エネルギー」の積分の二つの異なる面なのである。

5. 以上においてはわれわれは，たんに Hamilton の原理から「運動量・エネルギー」テンソルの一つの性質，すなわちこのテンソルの，状態の閉曲線にそっての積分は，この閉曲線をそれののっている軌道をかえることなく変形しても変わらないという性質を導いたにすぎない。こんどは，この性質は Hamilton の原理に代わり得るものである，すなわち，運動の微分方程式は，任意の閉曲線にそっての積分 $\int\omega_\delta$ を積分不変式として許容する唯一のものであることを証明しよう。

事実

$$\frac{dx}{\mathrm{X}}=\frac{dy}{\mathrm{Y}}=\frac{dz}{\mathrm{Z}}=\frac{dx'}{\mathrm{X}'}=\frac{dy'}{\mathrm{Y}'}=\frac{dz'}{\mathrm{Z}'}=\frac{dt}{\mathrm{T}} \tag{5}$$

を任意の微分方程式系としよう。ただしここに分母は，七つの変数 x, y, z, x', y', z', t の定まった関数とする。一つの媒介変数 α に関係する，この微分方程式系の積分曲線の一つの管を想像しよう。この媒介変数はたとえば 0 から l まで変わるとして，$\alpha=l$ に対応する積分曲線は，$\alpha=0$ に対応するそれと一致するものとする。この管を一周する閉曲線にそっての積分 $\int\omega_\delta$ が，選ばれた閉曲線には関係しないという事実を書き表わすために，管の上の任意の状態の標座 x, y, z, x', y', z', t は，媒介変数 α と，他のもう一つの媒介変数 u との関数であると考えよう。u に一つの定まった値を与えれば，われわれはこの管を一周する一つの閉曲線を得る。この管に属する一つの積分曲線にそって移動すれば，われわれは

$$\rho du=\frac{dx}{\mathrm{X}}=\frac{dy}{\mathrm{Y}}=\cdots=\frac{dt}{\mathrm{T}}$$

を得る。ただしここに ρ は，一つの任意の因数であるが，u=定数とおけば，管を一周する閉曲線の前もって与えられた任意の一系を得るように選び得る。

さて，u にある一定の値を与えたところの積分 $\mathrm{I}=\int_{(\mathrm{C})}\omega_\delta$ は u の関数である。したがって u だけを変えた移動に対して記号 d を用いることにすれば

$$d\mathrm{I}=\int_{(\mathrm{C})} mdx'\delta x+mdy'\delta y+mdz'\delta z-d\mathrm{E}\delta t+mx'd(\delta x)\\ +my'd(\delta y)+mz'd(\delta z)-\mathrm{E}d(\delta t)$$

を得る。または微分 d および δ の順序を変えて部分積分を行なえば

$$d\mathrm{I}=[mx'dx+my'dy+mz'dz-\mathrm{E}dt]_{\mathrm{C}}\\ +\int_{(\mathrm{C})}(mdx'\delta x+mdy'\delta y+mdz'\delta z-d\mathrm{E}\delta t\\ -mdx\delta x'-mdy\delta y'-mdz\delta z'+dt\delta\mathrm{E})$$

を得る。ここに積分されてしまった部分は，積分経路が閉じているのであるから明らかに0である。第二項に残っている積分に関しては，$\int\omega_\delta$ が考えている微分方程式系に対する積分不変式になるためには，

$$dx,\ dy,\ dz,\ dx',\ dy',\ dz',\ dt$$

をそれぞれ

$$\rho\mathrm{X},\ \rho\mathrm{Y},\ \rho\mathrm{Z},\ \rho\mathrm{X}',\ \rho\mathrm{Y}',\ \rho\mathrm{Z}',\ \rho\mathrm{T}$$

で置きかえた場合にこの積分が0になることが必要にしてかつ十分である。そしてこれは閉曲線（C）のいかんにかかわらず，関数 ρ のいかんにかかわらず0とならなければならない。これから容易に

$$dx,\ dy,\ dz,\ dx',\ dy',\ dz',\ dt$$

の係数が恒等的に0でなければならぬことが導かれる。したがって，一つの微分方程式系が積分不変式 $\int\omega_\delta$ を許容するためには，方程式

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &mdx'+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial x}dt=0,\\ &mdy'+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial y}dt=0,\\ &mdz'+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial z}dt=0,\\ &-mdx+\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial x'}dt=0, \end{aligned}\right. \quad \text{または} \left\{\begin{aligned} &mdx'-\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}dt=0,\\ &mdy'-\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}dt=0,\\ &mdz'-\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z}dt=0,\\ &-mdx+mx'dt=0, \end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned}&-mdy+\frac{\partial E}{\partial y'}dt=0,\\&-mdz+\frac{\partial E}{\partial z'}dt=0,\\&-dE+\frac{\partial E}{\partial t}dt=0,\end{aligned}\right.\qquad\left|\begin{aligned}&-mdy+my'dt=0,\\&-mdz+mz'dt=0,\\&-m(x'dx'+y'dy'+z'dz')+dU-\frac{\partial U}{\partial t}dt=0\end{aligned}\right.$$

が，この系の微分方程式から導かれる結果であることが必要でかつ十分である。

これらの方程式の最初の六つは，古典的な運動の微分方程式に他ならない。第七番目の方程式は，その一つの結論であるところのエネルギーの定理を与えている。

6. 以上によって，「運動量・エネルギー」テンソルの演ずる重要な役割がみられる。軌道は，一つの常微分方程式系の解を形成する状態の一系として定義されるということを認めるならば，この系は，すべての想像し得る微分方程式系のうちで，「運動量・エネルギー」テンソルの，任意の閉じた状態の一系にわたる線積分を積分不変式として許容する，という性質で特長づけられる。

こうしてわれわれは，運動量およびエネルギーの保存原理ともよばれ得る一つの新しい原理を得る。前項でみたように，エネルギーの定理はこの一つの特別な結論である。

II 一般の場合

7. 以上のことはこれをすべて，解析力学でふつうに考えられるような質点系へ拡張することができる。われわれはこれらの質点系がつぎの三つの条件を満足すると仮定する。

1° これらが受けている束縛は完全である。すなわち，各瞬間 t に，束縛力の基本的な仕事の総和は，この瞬間 t に存在する束縛と両立するすべての仮想変位に対して 0 である。これらの条件のもとで d'Alembert の原理は成立し

てつぎのようにのべられる。

d'Alembert の原理. 与えられた力の作用のもとで，完全束縛を受ける一つの質点系の運動を考えるならば，各瞬間における，与えられた力および慣性の力の基本的な仕事の総和は，この瞬間 t に存在する束縛と両立するすべての質点系の仮想変位に対して0である。

d'Alembert の原理は，公式

$$(7)\qquad \sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0$$

で表わされる。ここに X, Y, Z は質量 m の点 (x, y, z) に働く与えられた力の成分を表わし，δx, δy, δz は束縛と両立する最も一般な基本的な移動の成分を表わす。

さてわれわれは，完全束縛を受けるすべての質点系のうちで，束縛がホロノームなもののみを考えることにする。すなわち

2°　束縛は，質点系の点の座標と時間 t の微分を含まぬ方程式で表わされ得ると仮定する。これはまたさらに，質点系の種々の点の座標を，n 個の任意の媒介変数 q を用いて

$$\begin{aligned} x_i&=f_i(q_1, \cdots, q_n, t), \\ y_i&=g_i(q_1, \cdots, q_n, t), \qquad (i=1, 2, \cdots) \\ z_i&=h_i(q_1, \cdots, q_n, t) \end{aligned}$$

の形の公式で表わし得るということになる。q および t の各値の組に，瞬間 t に存在する束縛と両立し得る一つそして唯一つの質点系の位置が対応する。瞬間 t に存在する束縛と両立し得るすべての仮想変位は，$q_1, \cdots, q_n$ に任意の増分 $\delta q_1, \cdots, \delta q_n$ を与えて得られる。

さらにわれわれはつぎの最後の仮設を置く。

3°　瞬間 t に存在する束縛と両立し得る任意の仮想変位に対して，与えられた力の基本的な仕事の和は，q および t のある関数 U の全微分である。すなわち

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1+\cdots+\frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n$$

である。ここにわれわれは右辺に $\frac{\partial U}{\partial t}\delta t$ という項を書かなかった。なぜなら d'Alembert の原理で問題になる仮想変位は，t が一定であることを仮定しているからである。

8. Hamilton の最小作用の原理は，これを容易に以上の質点系へ拡張することができる。

$$W=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)+U\right]dt$$

とおこう。そして媒介変数 $q_1, \cdots, q_n$ を t ともう一つの他の媒介変数 α の関数とみなそう。ここに積分の上限と下限はいずれも α に関係し得るものとする。上に行なった（n° 2）と同様な計算によって，α に一つの変分 $\delta\alpha$ を与えた場合の，作用の変分 δW が与えられる。われわれは

$$\text{(8)}\qquad \delta W=[\omega_\delta]_1-[\omega_\delta]_0+\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta U-\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right]dt$$

を得る。ただしここに

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases}\omega_\delta=\sum m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)-\left[\frac{1}{2}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)-U\right]\delta t,\\[1ex] [\omega_\delta]_1=\sum m(x_1'\delta x_1+y_1'\delta y_1+z_1'\delta z_1)-\left[\frac{1}{2}\sum m(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)-U_1\right]\delta t_1,\\[1ex] [\omega_\delta]_0=\sum m(x_0'\delta x_0+y_0'\delta y_0+z_0'\delta z_0)-\left[\frac{1}{2}\sum m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)-U_0\right]\delta t_0\end{cases}$$

とおいた。

さて d'Alembert の原理から直ちに，質点系の一つの実際の運動が与えられた場合に，もしこの運動を任意の時間（t_0, t_1）の間で考えれば，これはこの質点系と同じ初めの位置および同じ終りの位置に対応する，これに無限に近い想像し得るあらゆる運動に対して，作用 W の極値を実現することがわかる。逆にこの性質をもった唯一の運動は，質点系の実際の運動である。これが Hamilton

の最小作用の原理である。

さらに公式 (8) は，（束縛と両立する）質点系の状態の閉じた一系にそってとられた積分 $\int\omega_\delta$ が，その状態の閉曲線を，それを作る状態のおのおのが質点系の対応する軌道にそって変化するように変形しても変わらないことを示している。言いかえれば，積分 $\int\omega_\delta$ は運動の微分方程式に対する一つの積分不変式である。

束縛と両立する質点系の状態のみを考えていると仮定した場合の微分形式 ω_δ は，やはりこれを，この質点系の「運動量・エネルギー」テンソルとよぶことができる。

9. ω_δ の式中にはいってくる微分 $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ は，一般には任意でない。なぜならこれらは，質点系の束縛方程式を全微分して得られる方程式を満足しなければならないからである。もしこの質点系の位置を表わす n 個の媒介変数を導入すれば，われわれはこれらの微分を

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \cdots,\ \delta q_n,\ \delta t$$

を用いて表わすことができる。われわれはこの見地に立って，一方では運動の微分方程式を，他方では「運動量・エネルギー」テンソルを定めよう。そのためには，基本作用量が媒介変数 q と時間 t とを用いて表わされていると仮定して $\delta\mathrm{W}$ を計算すればよい。

$$\mathrm{T}=\sum\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)$$

とおこう。運動のエネルギー T は，微分 $\dfrac{dq_i}{dt}$ に関して二次の関数である。われわれはこれを q_i' と書いて q_i および t と独立な変数とみなそう。しばらく

$$\mathrm{F}=\mathrm{T}+\mathrm{U},\qquad \mathrm{W}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{F}dt$$

とおこう。簡単な計算によって

$$\delta\mathrm{W}=\mathrm{F}_1\delta t_1-\mathrm{F}_0\delta t_0+\int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial q_i'}\delta q_i'\right)dt$$

が得られる。さて

$$\delta q_i' dt = \delta\frac{\partial q_i}{\partial t}dt = \frac{\partial}{\partial t}(\delta q_i)dt = d(\delta q_i)$$

である。したがって部分積分を行なって

$$\delta \mathrm{W} = \mathrm{F}_1\delta t_1 - \mathrm{F}_0\delta t_0 + \left[\sum\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'}\right)\right]\delta q_i dt$$

を得る。最後に

$$[\delta q_i]_{t_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}q_i(t_0, \alpha)\delta\alpha \quad \text{および} \quad \delta(q_i^0) = \frac{\partial q_i(t_0, \alpha)}{\partial t}\delta t_0 + \frac{\partial q_i(t_0, \alpha)}{\partial \alpha}\delta\alpha$$

であることに注意しよう。これから

$$[\delta q_i]_{t_0} = \delta(q_i^0) - q_i'^0\delta t_0 \quad \text{および} \quad [\delta q_i]_{t_1} = \delta(q_i^{(1)}) - q_i'^{(1)}\delta t_1$$

が得られる。したがって最後に

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} \delta \mathrm{W} = \sum\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'}\right)_1\delta(q_i^{(1)}) - \left(\sum q_i'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'} - \mathrm{F}\right)_1\delta t_1 \\ \qquad - \left[\sum\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'}\right)_0\delta(q_i^0) - \left(\sum q_i'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'} - \mathrm{F}\right)_0\delta t_0\right] \\ \qquad + \int_{t_0}^{t_1}\sum\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial q_i'}\right)\right]\delta q_i dt. \end{cases}$$

したがって Hamilton の原理によればつぎの運動方程式に導かれるが，これは Lagrange の方程式に他ならない。

$$\text{(11)} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

つぎに δW に対して見いだされた二つの値 (8) および (10) を比較して，テンソル ω_δ に対するつぎの式が見いだされる。

$$\text{(12)} \quad \omega_\delta = \sum\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}\delta q_i - \mathrm{H}\delta t$$

ただしここに

$$\text{(13)} \quad \mathrm{H} = \sum q_i'\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'} - \mathrm{T} - \mathrm{U}$$

とおいた。

量 $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'}$ は（選ばれた座標系に対する）拡張された運動量である。量 H は拡張されたエネルギーである。

10. 実際の場合には，簡単な注意によって，拡張されたエネルギーの計算を簡単にすることができる。運動のエネルギー T は，一般に $q_1', q_2', \cdots, q_n'$ に関する二次の項，一次の項，0次の項を含み得る。すなわち

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}_2+\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_0$$

である。したがって斉次関数に関する Euler の公式をあてはめれば，直ちに

$$\mathrm{H}=\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_0-\mathrm{U}$$

が得られる。拡張されたエネルギーにおいては，項 T_2 は運動学的な起源をもつもの，項 $-\mathrm{T}_0-\mathrm{U}$ は力学的な起源をもつものとみなし得られる。

たとえば，角速度 r で Oz のまわりを回転する軸に対して表わされた，一つの自由質点の場合をとろう。この場合には

$$2\mathrm{T}=m[(x'-ry)^2+(y'+rx)^2+z'^2]$$

を得る。したがって選ばれた座標系に関するエネルギーは

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-\frac{1}{2}mr^2(x^2+y^2)-\mathrm{U}$$

である。したがってエネルギーの力学的起源をもった部分は二つの項に分かれ，その一つは与えられた力に，他は遠心力によるものである。運動量の成分は，

$$m(x'-ry),\quad m(y'+rx),\quad mz',$$

すなわち絶対運動量の，選ばれた座標軸への射影である。

11. Hamilton の正準変数

q_i, q_i', t に関する一階微分方程式と考えられた運動の方程式は，変数

$$p_i=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i'} \tag{14}$$

を導入すれば，非常に簡単な形をとる。q_i' におきかえる新しい変数 p_i は，こ

の質点系の運動量の成分に他ならない。この場合テンソル ω_δ は，簡単な形

(15) $$\omega_\delta=\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

をとる。ここに H は，q_i，p_i および t の関数とみなされるべきである。

われわれは，運動の方程式が，質点系の状態の任意の閉曲線にそっての積分 $\int\omega_\delta$ を積分不変式として許容するということを書き表わして，直接運動の方程式を求めよう。

(16) $$\frac{dq_1}{\mathrm{Q}_1}=\frac{dq_2}{\mathrm{Q}_2}=\cdots=\frac{dp_n}{\mathrm{Q}_n}=\frac{dt}{\mathrm{T}}$$

を任意の微分方程式系としよう。これが積分不変式 $\int\omega_\delta$ を許容することを言い表わすには，n° 5 の議論を一語一語繰り返せばよい。われわれは微分方程式系 (16) の積分曲線の管を一つ考える。そして管に属する一つの状態の $2n+1$ 個の座標 p_i，q_i，t を，二つの媒介変数 α および u の関数として表わす。ここに α は，積分曲線上では定数で，$\alpha=l$ に対する積分曲線が $\alpha=0$ に対する積分曲線と一致するように，区間 0 と l の間を変わるものとする。変数 u に関する微分記号を d で表わして，

$$\mathrm{I}=\int_{(\mathrm{C})}\omega_\delta$$

とおけば，簡単な部分積分によって

$$d\mathrm{I}=\int_{(\mathrm{C})}\sum(dp_i\delta q_i-dq_i\delta p_i)-d\mathrm{H}\delta t+dt\delta\mathrm{H}$$

が得られる。

微分方程式系 (16) が積分不変式 $\int\omega_\delta$ を許容するためには，積分記号 $\int$ 内の量における

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \cdots,\ \delta q_n,\ \delta t$$

の係数が，微分方程式系の方程式を考えに入れれば，すべて 0 になることが必要かつ十分である。さてこれらの係数を 0 とおいてわれわれは，$2n+1$ 個の方程式

$$
(17)\qquad \begin{cases} dp_i+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}dt=0, \\ -dq_i+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}dt=0, \\ -d\mathrm{H}+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}dt=0 \end{cases}
$$

を得る。

これは積分不変式 $\int\omega_\delta$ を許容する微分方程式系が唯一つ存在することを示している。しかもこれは同時に，Hamilton の正準形に書かれた運動の方程式

$$
(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt}=\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} \end{cases}
$$

を与える。

最後の方程式

$$
d\mathrm{H}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}dt=0
$$

は，活力の定理を解析的に表わすものであって，始めの $2n$ 個の方程式から導かれる一つの結果である。

12. こうしてわれわれは，解析力学の質点系という一般の場合における，つぎの運動量およびエネルギーの拡張された保存法則に達する。

与えられた力を受ける質点系の運動はすべて，一つの一階微分方程式系を満足する状態の連続的な一系であることを認めるならば，これらの微分方程式は，状態の任意の閉曲線にそっての「運動量・エネルギー」テンソルの積分を積分不変式として許容するという性質で特長づけられる。

「運動量・エネルギー」テンソルはつぎの形のいずれかに置くことができる。すなわち

$$
\omega_\delta=\sum m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)-\left[\sum\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-\mathrm{U}\right]\delta t,
$$

$$\omega_\delta = \frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i - H\delta t, \qquad \left(H = \sum q_i' \frac{\partial T}{\partial q_i'} - T - U\right)$$

$$\omega_\delta = \sum p_i \delta q_i - H\delta t.$$

もし状態空間において，関係

$$\delta q_i = q_i'\delta t$$

を満足するように移動すれば，式 ω_δ は Hamilton の基本作用量 $(T+U)\delta t$ になる。これに反して，もし同時的な $(\delta t=0)$ 一系のみを考えれば，H. Poincaré の意味での積分不変式中の積分記号 $\int$ 内の元素である式

$$\sum p_i \delta q_i$$

が得られる。

13. 運動量およびエネルギーの保存法則によれば，空間および時間のなかで質点系の位置を定める役目をする媒介変数の選び方がどうあろうとも，運動の方程式を定めることができる。言いかえるとこの原理は，力学の法則に，Hamilton の原理が陰にこれを行なっているように，時空のいかなる特別な標定法にも関係しない形を与える。もし空間を表わす媒介変数の時間を表わす媒介変数に関する微分 q_1', ···, q_n' の代わりに，その互いの比が等式

$$\frac{\dot{q}_1}{q_1'} = \frac{\dot{q}_2}{q_2'} = \cdots = \frac{\dot{q}_n}{q_n'} = \frac{\dot{t}}{1}$$

で定義される $n+1$ 個の量

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots,\ \dot{q}_n,\ \dot{t}$$

を導入すれば，この性質は解析的に明らかとなる。

$$F = \dot{t}(T+U)$$

とおけば，「運動量・エネルギー」テンソルは

$$\omega_\delta = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n}\delta q_n + \frac{\partial F}{\partial \dot{t}}\delta t$$

の形をとる。ただし上式の右辺は，$\dot{q}_1$, ···, $\dot{q}_n$, $\dot{t}$ に関して斉一次であり，q_i, t, $\dot{q}_i$, $\dot{t}$ を用いて表わされている。

一般相対性理論において，重力の作用を受ける点の運動は，上の原理にしたがう。この場合関数 F は，空間および時間における点の位置を定める役割をする四つの変数 q_i をもち

$$F=\sqrt{\sum a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}$$

の形をしている。

III 正準方程式の変換，Jacobi の定理

14. 以上の考察の一つの重要な応用は，正準方程式の変換，および Jacobi に負う力学の方程式の積分法に関するものである。

閉曲線にそって とられた積分 $\int\omega_\delta$ は，ω_δ に一つの完全微分を加えても明らかに不変である。逆に他の一つの微分形式 π_δ が，任意の閉曲線にそって積分を行なった場合に ω_δ と同一の積分を与えるという性質をもっているならば，π_δ は ω_δ と唯一つの完全積分で異なるだけである。

さて二つの式

$$\omega_\delta=\sum p_i\delta q_i-H\delta t,$$

$$\pi_\delta=\sum r_i\delta s_i-K\delta t$$

が一つの完全微分でしか違わないような $2n$ 個の新しい変数 r_i，s_i と一つの関数 K を見いだし得ると仮定しよう。運動の微分方程式は，積分不変式 $\int\pi_\delta$ を許容するという性質で特長づけられる。したがって運動の方程式は

$$\frac{ds_i}{dt}=\frac{\partial K}{\partial r_i},\qquad \frac{dr_i}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial s_i}$$

と書かれる。すなわち運動方程式の正準形は保存される。

上においた仮定は，

$$\sum p_i\delta q_i-\sum r_i\delta s_i-(H-K)\delta t=\delta V \tag{19}$$

の形の恒等式で表わされる。

しかも，このような恒等式を実現することは容易である。事実 $2n+1$ 個の変

数 q_i，s_i，t の任意の関数 V から出発して

$$p_i=\frac{\partial V}{\partial q_i},\qquad r_i=-\frac{\partial V}{\partial s_i},\qquad K=\frac{\partial V}{\partial t}+H \tag{20}$$

とおこう。もしこれらの方程式が一つの変数変換を定義すれば，すなわち，もし最初の n 個の方程式が s_1，s_2，…，s_n に関して解き得るならば，つぎの n 個の方程式は r_1，…，r_n を与える。そして最後の方程式は関数 K を与える。しかもこうして得られた新しい変数は，力学の方程式の正準形を保存する。もし方程式 (20) が r_i および s_i に関して解き得るならば，これらはまた逆に p_i および q_i に関しても解き得ることに注意するのは大切である。実際いずれの場合にもそれが可能であるための条件は，行列式

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial s_j}\right|$$

が恒等的に 0 でないことである。

こうして恒等式 (19) から得られる解は，最も一般なものではない。事実この解は，$2n+1$ 個の量 q_i，s_i，t が一つまたは幾つかの関係で結ばれている場合を落としている。もっともこれら特別な場合は，q_i，s_i，t の間に存在する関係を先験的に与えてこれを直接取り扱うことが容易にできる。

15. 以上の一般論は，つぎの二つの場合の応用に対してとくに興味深いものとなる。

その第一は，関数 K が恒等的に 0 の場合である。正準方程式は

$$\frac{ds_i}{dt}=0,\qquad \frac{dr_i}{dt}=0$$

となる。したがって軌道の方程式は

$$s_i=a_i,\qquad r_i=b_i$$

となる。ただしここに a_i および b_i は $2n$ 個の任意定数である。こうなるためには，方程式 (20) によれば，偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=0 \tag{21}$$

を満足する一つの関数 $V(t; q_1, \cdots, q_n; a_1, \cdots, a_n)$ を見いだせばよい。

n 個の任意定数 $a_1, \cdots, a_n$ のはいってくるこの関数 V が，行列式

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial a_j}\right|$$

が恒等的には 0 でないようなものであれば，運動の方程式は

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad b_i = -\frac{\partial V}{\partial a_i}$$

である。これは Jacobi の定理である。行列式に関する条件は，関数 V が Jacobi の一階偏微分方程式（21）の完全積分であるということになる。

ここにあげるべき第二の応用は，摂動の理論に関するものである。関数 H は二つの項 H_1 および H_2 の和であり，H_2 は H_1 に対して非常に小さいと仮定しよう。これは与えられた力を二群に分け，その一つは他方に比べれば重要さの非常に小さな，摂動力と呼ばれるところのものから成るということになる。この場合天体力学で用いられる方法は，関数 H の重要項のみを入れた Jacobi の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H_1 = 0$$

の一つの完全積分 V をさがすことにある。かくして導入される $2n$ 個の新しい変数 r_i, s_i は，もし摂動力が存在しなければ 0 である。したがってこれらは撹乱されない軌道の媒介変数である。これらの新しい変数の導入は，新しい関数 $K = H_2$，すなわち H の摂動力にのみ関係する部分を用いれば，方程式の正準形を保存する。

正準方程式の理論および Jacobi の定理については，少なくも差し当たりはこれ以上強調しないことにする。とくに，力学の方程式の積分と，未知関数を明示的に含まない一階偏微分方程式の積分との間に存在する関係は，この種のすべての偏微分方程式に——またはさらに一般に，既知の無限小変換を許容するすべての偏微分方程式に——一つの一次積分不変式を結びつけ得るということを示した時に明らかになるであろう。

第 2 章

力学における二次元積分不変式

I　力学における二次元積分不変式の形成

16. Hamilton の基本作用量は，式

$$\omega_\delta=\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

において

$$\delta q_i=q_i'\delta t$$

であると仮定して得られることをわれわれはみた。

さらに，一つの質点系の軌道は，q_i および q_i' が，q_i は端で前もって与えられた値をとるというだけの条件で縛られた，t の任意の関数であると仮定するだけで，積分

$$\mathrm{W}=\int_{t_0}^{t_1}\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

の極値を実現するのは注目すべきことである。したがってここではもはや，Hamilton の原理におけるように，q_i' を q_i の時間に関する微分であるとは仮定していない。しかもさらに一般に，q_i, q_i', t は 0 から 1 まで変わる同一の媒介変数 u の関数であり，量 q_i および t は端で与えられた値をとると仮定することができる。

簡単な計算によって

$$\delta\mathrm{W}=\left[\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t\right]_{u=0}^{u=1}+\int_{u=0}^{u=1}\left(\sum(\delta p_i dq_i-\delta q_i dp_i)-\delta\mathrm{H}dt+\delta t d\mathrm{H}\right)$$

が得られる。積分されてしまった部分は仮定によって 0 である。極値曲線の方

程式は，積分記号内の量において

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \cdots,\ \delta p_n,\ \delta t$$

の係数を0とおいて得られる。さてこの計算はすでに第11項で行なったところであって，ちょうど運動の方程式をその正準形で与える。

17. われわれがすでに二度遭遇した式

$$\sum(dp_i\delta q_i - dq_i\delta p_i) - d\mathrm{H}\delta t + dt\delta\mathrm{H}$$

は二系の微分に関して一次である。もし二つの微分記号は互いに交換可能であると仮定すれば，上の式をさらに簡単な形

$$d\omega_\delta - \delta\omega_d$$

に書くことができる。これをわれわれは $\omega'(d,\ \delta)$ で示すことにするが，この式は，記号 d は状態空間における一つの軌道の方向への基本移動を定義し，記号 δ は任意の基本移動を定義するとすればつねに0となるという性質をもっている。もっともわれわれが，軌道の微分方程式を，または他の見地から言えば，積分不変式 $\int\omega_\delta$ を許容する微分方程式を得たのは，この性質を書き表わしてであった。

さてさらに一般に，二つの微分記号 δ および δ' で定義される任意の基本移動を考えて，双一次形式 $\omega'(\delta,\ \delta')$ の意味をさがすことを試みよう。そのために状態の二次元連続集合体を考えよう。このような集合は，q_i, p_i, t を二つの媒介変数 α および β の関数にとることによって実現される。この集合に属する各状態は，平面上に座標 $(\alpha,\ \beta)$ という点で表わされ，集合体はこの平面上の一つの領域で表わされる。記号 δ および δ' はそれぞれ α のみ，および β のみの増加に対するものとする。さて状態空間において，それぞれ媒介変数の値

$$\begin{array}{ll}
\alpha, & \beta \\
\alpha+\delta\alpha, & \beta \\
\alpha, & \beta+\delta'\beta \\
\alpha+\delta\alpha, & \beta+\delta'\beta
\end{array}$$

に対応する四つの状態 A, B, C, D を考えよう。そして曲線 ABCD にそって積分 $\int\omega$ を作ろう。明らかに

$$\int_{AB}=\omega_{\delta},\quad \int_{AC}=\omega_{\delta'},\quad \int_{CD}=\omega_{\delta}+\delta'\omega_{\delta},\quad \int_{BD}=\omega_{\delta'}+\delta\omega_{\delta'}$$

である。したがって

$$\int_{ABCD}=\delta\omega_{\delta'}-\delta'\omega_{\delta}=\omega'(\delta,\ \delta')$$

である。

18. 結局一つの任意の状態とこれに無限に近い二つの状態とに関係する双一次形式 $\omega'(\delta,\ \delta')$ は，以上によれば一つの閉曲線にそっての積分 $\int\omega$ の値を表わしているのであるから，これは各状態をそれに対応する軌道にそって移動させても値を変えないという意味で，軌道の微分方程式系に対して不変である。この形式はまた一つの二重積分の元素である。なお，たとえばもし p_1 および q_1 を平面上の点の（二つの媒介変数に関係する）座標とみなせば，式 $\delta p_1\delta' q_1-\delta q_1\delta' p_1$ は曲線座標 α および β に関する，この平面上の面積元素である。これはふつう

$$dp_1dq_1\quad \text{または}\quad \delta p_1\delta q_1$$

と書かれるところのものである。

これによってわれわれは，一つの新しい積分不変式

$$\iint\omega'=\iint\sum\delta p_i\delta q_i-\delta H\delta t \tag{1}$$

の概念に導かれる。状態空間中の一つの二次元面積にわたるこの二重積分は，この領域の状態のおのおのを，対応する軌道にそって移動させてもその値を変えない。もっともこの二重積分は，拡張された Stokes の公式によって，この領域をかこむ閉曲線にそっての線積分

$$\int\omega=\int\left(\sum p_i\delta q_i-H\delta t\right)$$

の表現としても得られる。

H. Poincaré の概念においては，同時的な状態で作られた領域しか考えない。したがって得られた結果をつぎの形に言い表わすことができる。

軌道の二次元的な集合が一つ与えられたとし，この集合に属する各軌道上に与えられた瞬間 t に対応する状態をとれば，これらの状態にわたる二重積分

$$\iint \sum \delta p_i \delta q_i$$

は t に無関係である。

ここに見られるように，この定理は，上に証明した性質の一つの特別な面しか表わしていない。

19. 二次元積分不変式 $\iint \omega'$ は，H. Poincaré によって**絶対不変式**とよばれた。これに反して不変量 $\int \omega$ は**相対不変式**と言われる。その意味はつぎのとおりである。すなわち二重積分 $\iint \omega'$ は，積分領域が開領域，閉領域のいかんにかかわらず不変な性質をもっているが，これに反して積分 $\int \omega$ は，積分が閉曲線にそって行なわれるときにのみ不変な性質をもっている。

積分 $\iint \omega'$ は，閉曲線にそっての積分 $\int \omega$ に他ならないのであるから，運動の微分方程式は積分不変式 $\iint \omega'$ を許容する唯一のものであると断定することができる。したがって積分 $\iint \omega'$ の不変性は，拡張された運動量・エネルギー保存則の新しい解析的な言いかえにすぎない。

II　渦動の理論への応用

20. 現在までわれわれは軌道の集合を考えてきた。しかしながらこのような集合は，われわれの想像においてのみ実現されるものである。ここにこのような集合が具体的に存在する一つの場合がある。それは一つのポテンシャル関数Uから導かれる力を受ける完全流体の場合である。実際流体力学においてつぎの方程式が証明される。

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
\gamma_x=\dfrac{\partial U}{\partial x}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\[2ex]
\gamma_y=\dfrac{\partial U}{\partial y}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\[2ex]
\gamma_z=\dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}
\end{cases}
$$

ただしここに γ_x, γ_y, γ_z は，瞬間 t に位置 (x, y, z) を占める分子の加速度の成分を表わし，p および ρ は，それぞれその点における圧力と密度を表わすものである。

さらに，p と ρ の間には前もって与えられた一つの関係が存在するという仮定をつけ加えよう。これは，もし運動が等温的であれば必ず起こることである。

もし，流体の一つの定まった運動に注意を向けるならば，p を x, y, z, t の一つの定まった関数とみなすことができ，したがって

$$
q=\int\frac{dp}{\rho}
$$

とおくことによって，各分子は，ポテンシャル関数 $U-q$ から導かれる力の場のなかにある，質量が1の一つの質点のように行動するのがみられる。

したがってわれわれは，与えられた力を受ける一つの動点の無限に多くの軌道の一つの具体的な表現を得る。ポテンシャル関数の $-q$ という部分は，まわりの分子が考えている分子におよぼす作用を表わしていることに注意しよう。

21. 各分子の軌道は，微分方程式系

$$
(3)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt}=u, & \dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial(U-q)}{\partial x},\\[2ex]
\dfrac{dy}{dt}=v, & \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{\partial(U-q)}{\partial y},\\[2ex]
\dfrac{dz}{dt}=w, & \dfrac{dw}{dt}=\dfrac{\partial(U-q)}{\partial z}
\end{cases}
$$

の一つの特殊解とみなし得られる。したがってもし流れのなかに，（それぞれ

任意の瞬間にとられた）分子の閉じた一系を考えれば，この閉系列にそってとられた積分

(4) $$\int u\delta x+v\delta y+w\delta z-\mathrm{E}\delta t$$

は，もし各分子をその軌道にそって移動させてもその値を変えない。この式においてわれわれは

(5) $$\mathrm{E}=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\mathrm{U}+q$$

とおいた。Eは，流体の（単位質量当りの）エネルギーである。このエネルギーは，運動のエネルギー $\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$，ポテンシャル・エネルギー $-\mathrm{U}$，および流体力学的な内部エネルギー q の和である。

とくにもし，すべて同一瞬間 t に考えられた分子の閉じた一系，すなわち流体中の閉曲線を一つ考えれば，積分 $\int udx+vdy+wdz$ は，もし運動の種々の瞬間における同一の閉曲線（すなわち同一の分子で作られた流体中の閉曲線）をとるならば，その値を変えない。これは循環保存の古典的な定理である。事実人は積分 $\int u\delta x+v\delta y+w\delta z$ に循環という名を与えている。

22. さてこんどは，これと少しく異なる見地をとろう。そしてやはり流体の一つの特別な運動を考えよう。この運動において速度の成分 u, v, w は x, y, z, t の定まった関数であり，種々の分子の軌道は，微分方程式系

(6) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=u, \\ \dfrac{dy}{dt}=v, \\ \dfrac{dz}{dt}=w \end{cases}$$

の解とみなし得られる。この右辺において u, v, w は，x, y, z, t の関数としての値でおきかえられているものと仮定する。積分

$$\int u\delta x+v\delta y+w\delta z-\mathrm{E}\delta t$$

は明らかに，やはりこの新しい方程式に対する相対積分不変式である。これを一つの二重積分に変形すれば，われわれは微分方程式系 (6) に対する一つの絶対積分不変式を得る。

式 $\delta\omega_{\delta'}-\delta'\omega_{\delta}$ を作ってわれわれは

$$\omega'(\delta,\ \delta')=\delta u\delta' x-\delta x\delta' u+\delta v\delta' y-\delta y\delta' v+\delta w\delta' z-\delta z\delta' w-\delta \mathrm{E}\delta' t+\delta t\delta' \mathrm{E}$$

を得る。この右辺は六つの結合

$$\delta y\delta' z-\delta z\delta' y,\qquad \delta z\delta' x-\delta x\delta' z,\qquad \delta x\delta' y-\delta y\delta' x,$$
$$\delta x\delta' t-\delta t\delta' x,\qquad \delta y\delta' t-\delta t\delta' y,\qquad \delta z\delta' t-\delta t\delta' z$$

に関して一次である。

実は Stokes の公式の応用に他ならないのであるが，簡単な計算によって，最初の三つの項の係数として

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\qquad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\qquad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

を得る。これらは渦動ベクトルの成分である。他の三つの係数を計算するには，式 ω' は方程式 (6) に対して不変なのであるから，$\omega(d,\delta)$ において δx, δy, δz, δt の係数を 0 とおいて得られる方程式は，方程式 (6) から得られる結果でなければならない，という注意を利用することができる。したがって

$$\omega'(d,\ \delta)=\xi(dy\delta z-dz\delta y)+\eta(dz\delta x-dx\delta z)+\zeta(dx\delta y-dy\delta x)$$
$$+\mathrm{P}(dx\delta t-dt\delta x)+\mathrm{Q}(dy\delta t-dt\delta y)+\mathrm{R}(dz\delta t-dt\delta z)$$

とおこう。

そうすれば，上に考えた方程式は

$$(7)\qquad \begin{cases}\eta dz-\zeta dy-\mathrm{P}dt=0,\\ \zeta dx-\xi dz-\mathrm{Q}dt=0,\\ \xi dy-\eta dx-\mathrm{R}dt=0,\\ \mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz=0\end{cases}$$

である。

これが方程式 (6) から導かれる結果であることを書き表わしてわれわれは

$$P=\eta w-\zeta v,$$
$$Q=\zeta u-\xi w,$$
$$R=\xi v-\eta u$$

を得る。したがって求める二次元積分不変式は

$$(8)\qquad \iint \xi\delta y\delta z+\eta\delta z\delta x+\zeta\delta x\delta y+(\eta w-\zeta v)\delta x\delta t+(\zeta u-\xi w)\delta y\delta t + (\xi v-\eta u)\delta z\delta t$$

である。

すべて同一瞬間 t にとられた分子で作られた面積にそって積分すれば，この積分はこの面積を過ぎる渦動束である。こうしてわれわれは，流体中の曲面を過ぎる渦動束保存の定理をふたたび見いだしたことになる。

23. われわれは式 $\omega'(d,\ \delta)$ を直接に計算することもできたのである。とくに $dx\delta t$ の係数 P は明らかに

$$P=-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial x}-w\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

である。これが前に得た値

$$P=\eta w-\zeta v=w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

に等しいことを書き表わしてわれわれは，方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

を得る。これは流体力学の第一方程式に他ならない。事実この式の左辺は，γ_x を展開した式に他ならない。

この結果はわれわれに，積分 $\int u\delta x+v\delta y+w\delta z-E\delta t$ は，u, v, w が一つのポテンシャル関数から導かれる力を受けている完全流体の分子の速度の成分であるとき，すなわち一つの加速度のポテンシャルが存在するときにのみ，微分方程式 (6) に対して不変であることを教えてくれる。

24.

$$
(7)\qquad \begin{cases} \eta(dz-wdt)-\zeta(dy-vdt)=0, \\ \zeta(dx-udt)-\xi(dz-wdt)=0, \\ \xi(dy-vdt)-\eta(dx-udt)=0 \end{cases}
$$

とも書かれ得る方程式 (7) は，微分方程式 (6) から導かれる一つの結果である。しかしながら (7) は，これらの微分方程式と同値ではない。言いかえると，軌道の方程式 (6) は，積分不変式 $\int\omega$ を許容する唯一のものではない。とくに，方程式 (7) が明らかにその一つの結果である方程式

$$
(9)\qquad \frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}=\frac{dt}{0}
$$

についても同様である。これらの方程式の解は，いわゆる**渦動線**である。軌道の微分方程式と渦動線の微分方程式とが同一の積分不変式を許容するという性質は，われわれを渦動の理論の基本定理へ導いて行く。

事実一つの渦動線の方向への（四次元空間 x, y, z, t 中での）基本移動 (dx, dy, dz, 0) は，移動 δ のいかんにかかわらず双一次形式 $\omega'(d,\delta)$ が 0 であるという性質で特長づけることができる。これは方程式 (7) からすぐにわかることである。さて，与えられた瞬間 t に，一つの渦動線 (Γ) を考えよう。これを作る分子は，他の瞬間 t' に一つの曲線 (Γ') を作る。われわれは (Γ') が瞬間 t' に対する一つの渦動線であることを示そう。

事実，$(dx', dy', dz', 0)$ を (Γ') にそっての一つの基本移動とし，これに任意の移動 $(\delta x', \delta y', \delta z', \delta t')$ を結びつけよう。そして三つの状態 (x', y', z', t'), $(x'+dx', y'+dy', z'+dz', t')$, $(x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z', t'+\delta t')$ をそれぞれの軌道にそって，最初の二つは瞬間 t まで，最後のそれは瞬間 $t+\delta t$ まで移動させよう。そうすればわれわれは，$(dx, dy, dz, 0)$ が渦動線 (Γ) にそっての移動を表わすような，一つの二次元元素を得る。したがって形式 $\omega'(d,\delta)$ の値は 0 である。したがってこれはまたもとの元素に対しても 0 であり，したがって (Γ') は一つの渦動線である。これは Helmholtz の有名な定理である。

25. 瞬間 t における一つの渦動管とこの管を一周する二つの閉曲線 (C) および (C$_1$) を考えよう。これら二つの閉曲線にそっての循環は同一である。なぜなら，$\int\omega$ は渦動線の微分方程式 (9) に対する一つの積分不変式であるからである。他の瞬間 t' には，渦動管はまた空間の他の位置を占めるであろう。しかしながら新しい管を一周するすべての閉曲線にそっての循環はやはり変わらない。なぜなら $\int\omega$ は軌道の微分方程式に対する積分不変式であるからである。こうしてわれわれは，流体力学においてふつう渦動管の能率または強度とふつうよばれる，すべての運動中に保存される量の概念を見いだす。この性質は，積分

$$\int u\delta x+v\delta y+w\delta z-\mathrm{E}\delta t$$

の，軌道の微分方程式および渦動線の微分方程式に対する不変性の特殊な一面にすぎない。

なお，種々の微分方程式に対して同時に不変な微分形式に関する一般の定理の特別な場合として，これらすべての結果を見いだすこともできる。

以上はすべて，ξ, η, ζ が三つとも 0 ということはない，すなわち流体の運動は回転的であることを本質的に仮定していることは，注意する必要はあるまい。

第 3 章

積分不変式と不変微分形式

I　積分不変式の一般概念

26. 以上の数章は，われわれに力学における積分不変式の概念の重要さを示している。われわれはつぎにこの概念を最も一般に研究しよう。

任意の一階常微分方程式系（つねにこの場合に引き戻し得ることは知られている）を考えて，これを

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=X_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=X_2, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=X_n \end{cases}
$$

と書こう。

われわれは独立変数 t と従属変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とを区別したが，しかし後にみるように，この区別はなんら本質的なものではない。われわれはやはり t は時間を表わすということにしよう。一つの解に対応する $x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ の値の集まりは，一つの軌道を作ると言われる。これは $n+1$ 次元空間 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 中の一つの曲線とみなし得られる。

さて H. Poincaré は，同時的な（すなわち，すべて t の同一の値に対応する）任意の点集合にわたる積分であって，この集合の点を，他の任意の瞬間 t' まで，対応する軌道にそって移動させてもその値を変えない（一重または多重）積分

に，**積分不変式**という名を与えている。積分不変式は，もしその不変性が積分領域のいかんにかかわらず起こるならば絶対，もしその不変性が閉じた積分領域に対してのみ起こるならば相対とよばれる。力学における一次積分不変式

$$\int\sum p_i\delta q_i$$

は相対であり，力学における二次積分不変式

$$\iint\sum\delta p_i\delta q_i$$

は絶対である。

積分不変式の最も簡単な形は

$$\int a_1\delta x_1+a_2\delta x_2+\cdots+a_n\delta x_n,$$

$$\int\sqrt{a_{11}\delta x_1{}^2+a_{22}\delta x_2{}^2+\cdots+2a_{12}\delta x_1\delta x_2+\cdots},$$

$$\iint a_{12}\delta x_1\delta x_2+a_{13}\delta x_1\delta x_3+\cdots+a_{n-1,n}\delta x_{n-1}\delta x_n,$$

$$\iiint a_{123}\delta x_1\delta x_2\delta x_3+\cdots$$

である。

27. 積分不変式の積分記号内にはいってくる量は一つの微分形式であって，そのなかには従属変数，独立変数およびその微分（またはいくつかの微分の列）がはいってくる。この形式Fは，これをそれ自身で考えることができる。そしてこの形式は，任意の一点と，それに無限に近いがしかし同時的である，一つまたは多数の点に対して計算すれば，これらをそれぞれの軌道にそって，しかしつねに同時的に保ちながら移動させてもその値を変えないという性質をもっている。この見地からみれば，積分記号内にはいり得る形式，たとえば δx_1, $\cdots$, δx_n の任意の（斉次）有理関数よりはさらに一般な形式を考えることができることは明らかである。

最初の二章で取り扱った例でそれを示したように，考察を同時的な点のそれ

に限らないほうが得策である。H. Poincaré の意味のすべての基本積分不変式は，さらに完全な積分不変式において，独立変数 t の一つまたは数個の微分を含む項をすべて取り去った結果とみなし得ることを示そう。

しかしながらこの本質的な，そして積分不変式のほとんどすべての性質のかぎをわれわれに与えるところのこの結果に達するためには，微分方程式系の第一積分に関する古典的な性質をざっと思い出すことが必要である。

II 第 一 積 分

28. よく知られているように，$x_1, \cdots, x_n$ を任意の軌道に対応する t の関数としての値でおきかえれば，こうして得られる t の関数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ は定数になるという性質をもった関数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ は，微分方程式系 (1) の**第一積分**とよばれる。これらの第一積分は，一階線形偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{2}$$

の解である。

方程式 (1) を積分し，従属変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を，時間 t，および $t=0$ に対するその初期値 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ の関数として表わしたと考えよう。すなわち

$$\begin{cases} x_1=f_1(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0), \\ \cdots\cdots \\ x_n=f_n(t;\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0). \end{cases}$$

これらの方程式を $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ に関して解けば，これら n 個の量に関して $x_1, \cdots, x_n, t$ の関数を得るが，これらは明らかに第一積分である。こうしてわれわれは，明らかに独立な，すなわち $x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ の間の恒等式では結ばれていない，n 個の第一積分の集まりを得る。

第一積分 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ の関数はすべてまた第一積分であり，しかもその逆の成立することは明らかである。なぜなら，もし u が一つの任意の第一積分

であれば，一つの任意の軌道に対するその数値は，その性質それ自身によって $u(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, 0)$ に等しいからである。

$x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ の関数 u の全微分は明らかに

$$du=\lambda_1(dx_1-X_1dt)+\lambda_2(dx_2-X_2dt)+\cdots+\lambda_n(dx_n-X_ndt)+\lambda dt$$

の形に書くことができる。u が第一積分であるための必要かつ十分な条件は，係数 λ が恒等的に 0 になることである。これは直接の推論によって容易に理解することができる。または，λ が実は方程式 (2) の左辺に他ならないことに注意してこれを験証することもできる。したがっていかなる第一積分の微分も，n 個の一次微分形式

$$dx_1-X_1dt,\ dx_2-X_2dt,\ \cdots,\ dx_n-X_ndt$$

の一次結合であり，逆にこれらの形式のおのおのは，与えられた n 個の独立な第一積分の微分の一次結合である。

III　絶対積分不変式と不変微分形式

29. さて，われわれはまず絶対積分不変式を取り扱おう。あらゆる絶対積分不変式の元素は，点 $(x_1, \cdots, x_n, t)$ とそれに無限に近い点 $(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n, t)$ をそれぞれの軌道にそって，しかしこれらをつねに同時刻で考えながら移動してもその値を変えないような微分形式 $F(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n)$ である。いまとくにこれらを $t=0$ という瞬間で考えよう。われわれは

$$F(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n)=F(x_1^0, \cdots, x_n^0, 0; \delta x_1^0, \cdots, \delta x_n^0)$$

を得る。

さてこの右辺において x_i^0 を微分方程式系 (1) の第一積分とみなし，これらを $x_1, \cdots, x_n, t$ の関数としての値でおきかえよう。そうすればわれわれは，新しい恒等式

$$F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, 0; \delta x_1^0, \delta x_2^0, \cdots, \delta x_n^0)=\Phi(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta t)$$

を得る。

この恒等式の右辺は明らかに，その値が，初期値 $x_1^0, \cdots, x_n^0$ で定義される軌道と，これに無限に近い軌道とにのみ関係する一つの量である。したがってその値は，第一の軌道上にとられた特別な点 $(x_1, \cdots, x_n, t)$，およびこれに無限に近い軌道上にとられた特別な点 $(x_1+\delta x_1, \cdots, x_n+\delta x_n, t+\delta t)$ には無関係である。したがってこれは一つの積分不変式の元素である。しかしこれは，われわれが出発点に用いた積分不変式よりもさらに完全な積分不変式の元素である。なぜならこの場合には，同時的な点のみを考える必要がないからである。

さて，最初の形式 F から最後の形式 Φ へは，非常に容易に移り得ることに注意しよう。事実，もし $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, \delta x_1^0, \cdots, \delta x_n^0$ の計算において，t を一つの定数とみなすならば，われわれは明らかに形式 F へ戻ってしまう。したがって

$$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n, 0) = \mathrm{F}(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n)$$

である。さて δt は $\delta x_1^0, \delta x_2^0, \cdots, \delta x_n^0$ を介してはいってくるだけである。そしてこれら n 個の微分は

$$\delta x_1 - \mathrm{X}_1\delta t,\ \delta x_2 - \mathrm{X}_2\delta t,\ \cdots,\ \delta x_n - \mathrm{X}_n\delta t$$

の一次結合である。したがって Φ はこれら n 個の一次結合にのみ関係する。そしてもし $\delta t=0$ に対する式がわかれば，δx_1 を $\delta x_1 - \mathrm{X}_1 dt, \cdots$ 等でおきかえることによって，任意の δt に対する式が直ちに得られる。

こうして最後にわれわれは

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta t) = \mathrm{F}(x_1, \cdots, x_n, t; \delta x_1 - \mathrm{X}_1\delta t, \cdots, \delta x_n - \mathrm{X}_n\delta t) \tag{3}$$

を得る。

30. ここに得られた結果を要約しよう。これらは二つある。

1° H. Poincaré の意味での絶対積分不変式の元素であり，そのなかには従属変数の微分しかはいってこない形式Fは，そのなかに同時に独立変数 t の微分（または諸微分）がはいってくる，さらに完全な形式 Φ に随伴せしめられ

る。形式 Φ から形式 F へは，δt を含む項を省略して移る。逆に形式 F から形式 Φ へは，

$$\delta x_1,\ \delta x_2,\ \cdots,\ \delta x_n$$

をそれぞれ

$$\delta x_1 - X_1\delta t,\ \delta x_2 - X_2\delta t,\ \cdots,\ \delta x_n - X_n\delta t$$

でおきかえて移る。

2° 形式 Φ は，微分方程式系 (1) の第一積分とその微分とを用いて書き表わされ得る。

この後者の性質は，形式 Φ の不変性を明らかにしている。

一つの簡単な例によって，二つの形式 F および Φ の間の関係をよく理解することができるであろう。もし一つの任意の積分 u から出発すれば，全微分 δu は明らかに一つの形式 Φ である。これに対応する形式 F は

$$F = \frac{\partial u}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\delta x_n$$

であるから，確かに

$$\Phi = \delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\delta x_1 - X_1\delta t) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\delta x_2 - X_2\delta t) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(\delta x_n - X_n\delta t)$$

を得る。

31. 微分方程式系 (1) の第一積分とその微分とで表わし得られる一つの微分形式を，微分方程式系 (1) に対する**不変形式**と呼ぶことにする。絶対積分不変式内の積分記号内の量は，不変形式中で δt を 0 とおいて得られる。かく，力学の二次積分不変式は，不変形式

$$\sum \delta p_i \delta q_i - \delta H \delta t$$

に，または，二系の微分を導入して，

$$\Phi = \sum(\delta p_i \delta' q_i - \delta q_i \delta' p_i) - \delta H \delta' t + \delta t \delta' H$$

に対応する。

その第一積分 p_i^0, q_i^0 を用いた表現は，明らかに

$$\Phi=\sum(\delta p_i{}^0\delta' q_i{}^0-\delta q_i{}^0\delta' p_i{}^0)$$

である。

IV 相対積分不変式．Hamilton の関数

32. 以上の結果の一部分は，相対積分不変式の理論に拡張される。H. Poincaré によって考えられたような，力学の一次積分不変式

$$\int\sum p_i\delta q_i$$

が，各状態をその軌道の上で瞬間 t から他の任意の瞬間 t' まで変位させてもその値を変えず，積分

$$\int\sum p_i{}^0\delta q_i{}^0$$

に等しいという場合がそうである。したがって，相対積分不変式はすべて，第一積分とその微分しかはいってこないような形をとり得，しかもこの形においては，その不変性を失うことなく，同時的または非同時的状態で作られたすべての閉領域へ拡張される。

しかしながらもしこれらの新しい式において，第一積分を従属および独立変数の関数としての表現でおきかえるならば，積分記号内に一つの形式 Φ を得るが，これはもはや初めの形式 F から二重積分の場合と同様な操作によって導き得ないものである。実際等式

$$\int F(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1,\ \cdots,\ \delta x_n)=\int\Phi(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1,\ \cdots,\ \delta x_n,\ 0)$$

は，確かに同時的な点で作られたすべての閉積分領域に対して成立する。しかしながら，これら二つの積分が項別に等しいということは導かれない。そして公式 (3) と同様

$$\Phi(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1\ \cdots,\ \delta x_n,\ \delta t)=F(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1-X_1\delta t,\ \cdots,\ \delta x_n-X_n\delta t)$$

を導くのに必要な等式

$$\mathrm{F}(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1,\ \cdots,\ \delta x_n)=\Phi(x_1,\ \cdots,\ x_n,\ t;\ \delta x_1,\ \cdots,\ \delta x_n,\ 0)$$

は必ずしも成立しない。

たとえば，一つの自由質点という簡単な場合に，H. Poincaré の一次積分不変式の表現における積分記号内にはいってくる元素

$$\mathrm{F}=m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)$$

からは

$$m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)-m(x'^2+y'^2+z'^2)\delta t$$

が導かれるが，これは決して完全積分不変式の元素ではなく，当然そうあるべきように，形式

$$\omega_\delta=m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)-\left[\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)-\mathrm{U}\right]\delta t$$

と唯一つの完全微分で異なるわけではない。

H. Poincaré の意味における相対不変式から完全積分不変式への移行においてここに起こる困難が，たいした実際的重要性をもっていないことは注意すべきである。なぜなら，相対積分不変式はすべて一つの絶対積分不変式に帰せしめられるからである。実際われわれは，一つの閉曲線，一つの閉曲面等にわたる積分は，この閉曲線でかこまれた一つの面積，この閉曲面でかこまれた一つの体積等にわたる積分に直されることを知っている。

33. 二，三の例によって上の考察を説明するのも無用ではあるまい。

ふたたび，力学の（完全）一次積分不変式，すなわち「運動量・エネルギー」テンソル

$$\omega_\delta=\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

をとろう。

われわれは等式

$$\int_{(\mathrm{C})}\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t=\int_{(\mathrm{C}_0)}\sum p_i^0\delta q_i^0$$

を得る。ただしここに閉曲線 (C_0) は，(C) を作る状態ではあるが，その軌道にそって瞬間 $t=0$ まで移動させた状態で作られているものと仮定する。さらに，p_i^0 と q_i^0 を p_i, q_i および t の関数とみなすという条件のもとで，右辺の積分を，左辺の積分と同様，同一の閉曲線 (C) にそってとられたものとみなすことができる。この見地からみれば，二つの式

$$\sum p_i\delta q_i - \mathrm{H}\delta t \quad と \quad \sum p_i^0\delta q_i^0$$

は，任意の閉曲線にそって同一の積分を与えるのであるから，互いに一つの完全微分で異なっている。したがってわれわれは

(4)
$$\sum p_i\delta q_i - \mathrm{H}\delta t = \delta \mathrm{S} + \sum p_i^0\delta q_i^0$$

を得る。

関数 S は Hamilton の関数とよばれるところのものである。これは一つの簡単な具体的な解釈をもっている。実際もし，変化する軌道にそっての作用の変分を与える第1章の公式 (10) を参照すれば，S が，状態 (p, q, t) に終わる軌道にそっての瞬間 0 と瞬間 t の間の作用を表わすものと解釈し得ることがわかる。

この関数 S は Hamilton によって考えられた。この関数は歴史的な見地からみれば，ある種の重要性をもっている。なぜなら，Jacobi をして力学の方程式の積分に関する彼の発見へ向けたのは，この主題に対する Hamilton の注意であったからである。実際 Hamilton は，もし関数 S を，p_i, q_i および t の関数としてではなく，q_i，q_i^0 および t の関数として表わす方法を知れば，それによって運動の方程式を積分し得ることを注意している。事実

$$\delta \mathrm{S} = \sum p_i\delta q_i - \mathrm{H}\delta t - \sum p_i^0\delta q_i^0$$

の形に書かれた恒等式 (4) は

(5)
$$p_i = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i}, \qquad -p_i^0 = \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q_i^0}, \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t} + \mathrm{H} = 0$$

を与える。この第二の方程式は，p_i^0 を t と $2n$ 個の初期値の関数として与える。第一の方程式は運動量 p_i を与える。終わりに最後の方程式は，関数 S が偏微

分方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t,\ q_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i}\right)=0 \tag{6}$$

の解であることを示している。この概念における困難は，この偏微分方程式を積分することにあるのではなく，むしろ任意定数 q_i^0 がちょうど q_i の初期値であるような解を見いだすことにある。

Jacobi は，この条件が，偏微分方程式 (6) の積分を，運動の方程式の積分に利用するためには全然不要であることを示して，この困難を解決した。これはすでに，第14項で簡単にのべたことである。

34. 一つの簡単な場合，たとえばいかなる力をも受けていない，質量1の自由質点の場合に，Hamilton の関数 S の実際の計算を行なうのは，相当参考になるであろう。

この場合運動の方程式は

$$\begin{aligned} x&=x_0't+x_0, & x'&=x_0', \\ y&=y_0't+y_0, & y'&=y_0', \\ z&=z_0't+z_0, & z'&=z_0' \end{aligned}$$

である。

差

$$\begin{aligned} \delta S=\omega_\delta-(\omega_\delta)_0=&x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z-\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\delta t \\ &-(x_0'\delta x_0+y_0'\delta y_0+z_0'\delta z_0) \end{aligned}$$

は

$$\begin{aligned} \delta S=&x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z-\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\delta t \\ &-x'\delta(x-tx')-y'\delta(y-ty')-z'\delta(z-tz') \\ =&\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)\delta t+t(x'\delta x'+y'\delta y'+z'\delta z') \end{aligned}$$

に等しい。これから，S は t を 0 とすれば 0 となることに留意して

$$S=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)t$$

を得る。

Sを x, y, z, x_0, y_0, z_0, t の関数として表わして

$$S=\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{t}$$

を得る。

Hamilton の公式 (5) によれば，この関数から，運動の方程式

$$x'=\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{x-x_0}{t},\quad -x_0'=\frac{\partial S}{\partial x_0}=-\frac{x-x_0}{t},$$

$$y'=\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{y-y_0}{t},\quad -y_0'=\frac{\partial S}{\partial y_0}=-\frac{y-y_0}{t},$$

$$z'=\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{z-z_0}{t},\quad -z_0'=\frac{\partial S}{\partial z_0}=-\frac{z-z_0}{t}$$

が得られる。

V　例．“物質元素”形式

35. 以上でかっこを閉じて，ふたたび絶対積分不変式に戻ろう。

上にのべたように，形式 F から δx_i を $\delta x_i - X_i\delta t$ でおきかえて得られる微分形式 Φ の不変性を，最も簡単な場合に直接理解するのがよい。

簡単のために，二つの未知関数をもった微分方程式系

$$\frac{dx}{dt}=X,\quad \frac{dy}{dt}=Y$$

をとって，まず絶対一次積分不変式

$$I=\int a(x,\ y,\ t)\delta x+b(x,\ y,\ t)\delta y$$

から出発しよう。これに随伴する完全積分不変式は

$$J=\int a(x,\ y,\ t)(\delta x-Xdt)+b(x,\ y,\ t)(\delta y-Y\delta t)$$

である。

xy 平面にある曲線弧 A_0B_0 から出発して，この曲線孤上の種々の点を通って対応する軌道を引こう。こうしてわれわれは，その（直線でない）母線が軌道であるところの一種の柱面を得る。この曲面上に，A_0 から出る軌道を B_0 から出る軌道に結ぶところの二つの曲線弧 MN，M′N′ を引こう。われわれは

$$J_{MN}=J_{M'N'}$$

であることを証明したい。

二つの曲線弧 MN および M′N′ は，軌道の弧 MM′ および NN′ とともに，この曲面上に一つの閉面積をかこむ。他方，二つの弧 MM′ および NN′ のおのおのにそっての積分 J は明らかに 0 である。なぜなら，これらの弧の一つの上ではつねに

$$\delta x=X\delta t,\quad \delta y=Y\delta t$$

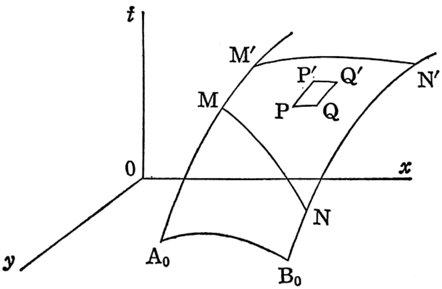
であるからである。

したがって閉曲線 MNN′M′ にそっての積分 J は

$$J_{MNN'M'}=J_{MN}-J_{M'N'}$$

であり，結局この積分が 0 であることを証明すればよい。

さて Stokes の公式によれば，この積分は面積 MNN′M′ にわたる面積分に帰着する。われわれはこの面積分の元素が 0 であることを証明しよう。実際そのために，この曲面を，一方は軌道の弧で，他方はその t=定数という平面で



の切口で作られた，小さな平行四辺形に分けよう。今 PQQ′P′ をこれらの面素の一つとする。これに対応する面積元素は

$$J_{PQ}-J_{P'Q'}$$

である。ところが PQ 上の点は同時的であり，P′Q′ 上の点についても同様であるから，J_{PQ} は I_{PQ} に，$J_{P'Q'}$ は $I_{P'Q'}$ に帰着する。さて仮定した I が一つの積分不変式であるという性質によれば，これら二つの積分 I_{PQ} と $I_{P'Q'}$ は相等しい。

したがって面積元素は確かに 0 で，定理は証明された。

36. 同様の議論が，二次積分不変式

$$I=\iint a(x,\ y,\ t)\delta x\delta y$$

の場合にも行なわれる。

この場合形式 F から形式 Φ への移行は，前の場合よりも少しく困難である。これは，曲面素 $\delta x\delta y$ を一つの双一次形式 $\delta x\delta' y-\delta y\delta' x$ と同じものとみて行なわれる。それにはある不定の曲線座標系 $(\alpha,\ \beta)$ を想像し，$\delta x,\delta y$ を第一の座標 α の増加 $\delta\alpha$ に対する基本移動，$\delta' x,\delta' y$ を第二の座標 β の増加 $\delta'\beta$ に対する基本移動とみなせばよい。そうすれば

$$F=a\begin{vmatrix}\delta x & \delta y\\ \delta' x & \delta' y\end{vmatrix}$$

を得るが，これから

$$\Phi=a\begin{vmatrix}\delta x-X\delta t & \delta y-Y\delta t\\ \delta' x-X\delta' t & \delta' y-Y\delta' t\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}\delta x & \delta y\\ \delta' x & \delta' y\end{vmatrix}+aX\begin{vmatrix}\delta y & \delta t\\ \delta' y & \delta' t\end{vmatrix}+aY\begin{vmatrix}\delta t & \delta x\\ \delta' t & \delta' x\end{vmatrix},$$

または，面積分の理論で用いられる記号に戻って

$$\Phi=a\delta x\delta y+aX\delta y\delta t+aY\delta t\delta x$$

が導かれる。

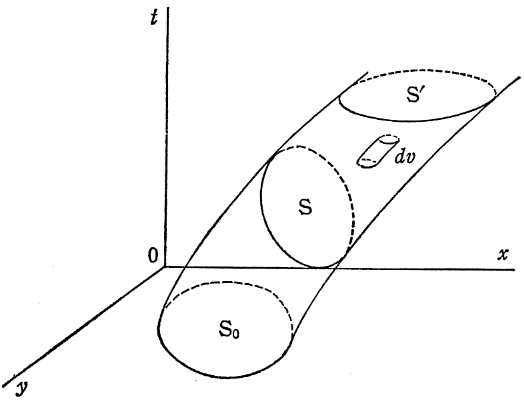
したがって，面積分

$$J=\iint a\delta x\delta y+aX\delta y\delta t+aY\delta t\delta x$$

を考えて，その不変性を直接理解することを試みよう。そのために，xy 平面内に任意の領域 S_0 を想像し，この領域の種々の点から出る軌道を作ろう。こうしてわれわれは，S_0 の周囲から出る軌道によって作られる一種の柱面で限られた，無限にのびた立体を得る。この立体を二つの任意の曲面できろう。こうしてわれわれは，立体の内部に，側面まで広がった（平または曲）面積 S および S′ を得る。われわれは

$$J_S = J_{S'}$$

であることを証明しよう。



面積 S および S′ は，柱の側面の一部分とともに，一つの体積 V を囲む。他方この体積を限る側面にそっての積分 J は明らかに 0 である。なぜなら面素を $d\sigma$，その法線の方向余弦を α, β, γ とよべば，われわれは

$$J = \iint a(\gamma + X\alpha + Y\beta)\,d\sigma$$

を得，しかも方向 (X, Y, 1) は，考えている側面を作る軌道に接しており，したがって方向 (α, β, γ) に垂直であるからである。これから差 $J_{S'} - J_S$ は，体積 V をかこむ閉曲面にそっての面積分 J であるとみなし得ることがわかる。した

がって結局，これに同値な体積分が恒等的に0であることを証明すればよいことになる。さてこの体積分の積分素は明らかに0である。これを理解するには，側面は軌道の小さな弧で，両底は xy 平面に平行な平面積で限られた立体を，基本立体としてとればよい。なぜならこの場合には，各底にそっての面積分 J は積分 I になり，積分 I の値は仮定によって両底に対して相等しいからである。

37. 連続物質の運動学は，われわれに本章で展開した考察に対する一つの具体的な説明を与える。

運動しつつある連続物質中では，各分子の軌道は微分方程式系

$$\frac{dx}{dt}=u, \qquad \frac{dy}{dt}=v, \qquad \frac{dz}{dt}=w$$

の一つの解とみなし得られる。ただしここに速度の成分 u, v, w は，x, y, z, t の関数として表わされていると考える。他方 $\rho(x, y, z, t)$ を，瞬間 t，点 (x, y, z) における密度としよう。瞬間 t に任意の体積 V を満たす質量は，三重積分

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

で与えられる。この積分は，明らかに H. Poincaré の意味での積分不変式をなしている。しかもこれは，H. Poincaré によって与えられた積分不変式の最初の例でさえある。もし瞬間 t に体積 V を満たす分子が，他の瞬間 t' に体積 V′ を満たすとすれば，明らかに

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho(x, y, z, t)\,\delta x\,\delta y\,\delta z=\iiint_{\mathrm{V'}} \rho(x', y', z', t')\,\delta x'\,\delta y'\,\delta z'$$

である。

形式 $\mathrm{F}=\rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z$ に随伴する形式 Φ は，前例におけるように，F を

$$\mathrm{F}=\rho\begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta' x & \delta' y & \delta' z \\ \delta'' x & \delta'' y & \delta'' z \end{vmatrix}$$

という形に書いて計算される。これから

$$\Phi=\rho\begin{vmatrix}\delta x-u\delta t & \delta y-v\delta t & \delta z-w\delta t\\ \delta' x-u\delta' t & \delta' y-v\delta' t & \delta' z-w\delta' t\\ \delta'' x-u\delta'' t & \delta'' y-v\delta'' t & \delta'' z-w\delta'' t\end{vmatrix}$$

が導かれるが，さらに容易な計算によって

$$\Phi=\rho(\delta x\delta y\delta z-u\delta y\delta z\delta t-v\delta z\delta x\delta t-w\delta x\delta y\delta t)$$

が得られる。

この形式 Φ は，完全に運動学的な見地からみた物質元素を表わしている。もし分子の任意の三次元集合体を考え，その運動の任意の瞬間における，この集合に属する各分子をとれば，四次元の宇宙（x, y, z, t）中に一つの三次元領域を得る。この領域にわたる Φ の三重積分は，考えている分子の集合の全質量に等しい。もしこれらの分子を全部同一瞬間 t に考えれば，これらはこの瞬間にある体積 V を満たし，Φ の積分は積分 $\iiint_V \rho\delta x\delta y\delta z$ になる。しかしながらこれは，一つの全く特別な場合である。

たとえば考えを定めるために，空間に一つの面積 S と，瞬間 t_0 と瞬間 t_1 の間にこの面積 S を過ぎるすべての分子の集合を考えよう。そしてこれらの分子のおのおのを，それが面積を過ぎる瞬間にとって考えよう。われわれはここに，宇宙（x, y, z, t）の三次元領域を一つもっている。この領域の状態は，三つの媒介変数 α, β, γ を用いて容易に表わされる。そのためには，S の一点の座標を二つの媒介変数 α, β の関数として表わし，$t=\gamma$ ととればよい。そうすれば

$$\begin{aligned}x&=f(\alpha,\ \beta),\\ y&=g(\alpha,\ \beta),\\ z&=h(\alpha,\ \beta),\\ t&=\gamma\end{aligned}$$

という公式を得る。ただしここに媒介変数 α および β は，面積 S の種々の点に対応する値をすべて取り，媒介変数 γ は時間（t_0, t_1）のあらゆる可能な値をとるものとする。この領域にわたる Φ の積分は，符号を別にすれば，明らかに

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta t\left[\iint_{(S)}\rho u\delta y\delta z+\rho v\delta z\delta x+\rho w\delta x\delta y\right]$$

に等しい。

かっこ内の面積分は，瞬間 t に面積 S を過ぎる物質の束を表わしている。これに δt をかければ，これは時間 $(t, t+\delta t)$ に面積 S を過ぎる物質の量を表わす。したがって全積分は，当然期待すべきであるように，時間 (t_0, t_1) に S を過ぎる全質量を表わす。

38. 同様な注意が，われわれがすでに流体力学で出会った（第Ⅱ章，公式(8)）二重積分

$$\mathrm{J}=\iint \xi\delta y\delta z+\eta\delta z\delta x+\zeta\delta x\delta y+(\eta w-\zeta v)\delta x\delta t+(\zeta u-\xi w)\delta y\delta t+(\xi v-\eta u)\delta z\delta t$$

にもあてはまる。

われわれはすでに（第25項），同一の瞬間 t にとられた，分子の二次元集合体にわたるこの積分が，これらの分子から出る渦動線によって作られる渦動管の能率，または強度を表わしているのをみた。さて時間 (t_0, t_1) に曲線 C の一つの弧を過ぎる分子の集合を考えよう。そしてこれらの分子を同一瞬間 t にとる代わりに，そのおのおのを曲線 C の弧を過ぎる瞬間にとろう。任意の瞬間 t に，これらの分子が属する渦動管の能率は，積分

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta t\int_{(\mathrm{C})}\begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ \xi & \eta & \zeta\\ u & v & w\end{vmatrix}$$

に等しい。

第 4 章

微分形式の特性系

I　微分形式のクラス

39. 本章全体を通じてわれわれは，n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をもった微分方程式系を，独立変数を特別な記号で区別することなく考える。言いかえれば，われわれは

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{1}$$

という形の微分方程式系を考える。

積分不変式の理論に起こる最初の問題の一つはつぎの問題である。すなわち，与えられた微分形式が与えられた微分方程式系に対して不変であるかどうかを知る問題，そしてさらに一般に，与えられた微分形式を不変形式としてもつようなすべての微分方程式系を決定する問題である。

応用に最もしばしば現われる微分形式に対する，この問題の解を考える前に，二，三の一般的な注意をすることができる。これらの注意はわれわれを，非常に重要な定理へ導いていく。

一つの形式 $\varPhi$ が微分方程式系 (1) に対して不変であり得るためには，この形式 $\varPhi$ が (1) の第一積分とその微分とで表わし得ることが必要かつ十分である。したがって与えられた形式 $\varPhi$ が適当に選ばれた微分方程式系に対して不変形式であるための一つの必要条件は，この形式が高々 $n-1$ 個の量とその微分とで書き表わされることである。

40. さて与えられた形式 Φ は，$r<n$ 個の量 y_1, y_2, $\cdots$, y_r (x_i の関数) とその微分とで表わし得られると仮定しよう。そしてさらに，この形式は r 個以下の量を用いたのではそのように表わし得ないと仮定しよう。これらの条件のもとでわれわれはつぎの定理を証明しよう。

一つの微分方程式系が Φ を不変形式として許容するためには，$y_1, y_2, \cdots, y_r$ がこの微分方程式系の第一積分であることが必要にしてかつ十分である。

この条件は明らかに十分である。これが必要であることを証明するために，Φ を不変形式として許容する一つの微分方程式系を考えて，この系の方程式を，新しい変数 $y_1, \cdots, y_r$ と他の $n-r$ 個の独立な量 $y_{r+1}, \cdots, y_n$ を用いて書こう。

$$\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\cdots=\frac{dy_r}{Y_r}=\frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}}=\cdots=\frac{dy_n}{Y_n} \tag{2}$$

をこの系の方程式とする。もし $y_1, \cdots, y_r$ が全部は第一積分ではなければ，最初の r 個の分母 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_r は全部は 0 ではない。例えば $Y_r \neq 0$ と仮定しよう。そうすれば y_r を独立変数にとることができ，したがって形式 Φ は，y_r と δy_r を 0 で，

$$y_1,\ \cdots,\ y_{r-1},\ y_{r+1},\ \cdots,\ y_n$$

を微分方程式系 (1) の第一積分とみなされたその初期値

$$y_1^0,\ \cdots,\ y_{r-1}^0,\ y_{r+1}^0,\ \cdots,\ y_n^0$$

で，最後に微分

$$\delta y_1,\ \cdots,\ \delta y_n$$

を

$$\delta y_1^0,\ \cdots,\ \delta y_n^0$$

でおきかえてもその値を変えない。

しかしながら Φ は，$y_{r+1}, \cdots, y_n$ もその微分も含んでいないのであるから，こうして得られる新しい形式 ψ は，$y_1, \cdots, y_{r-1}$ とその微分にしか関係しない。言いかえると，われわれは x_i の $r-1$ 個の関数 $z_1, \cdots, z_{r-1}$ を見いだし得て，Φ はこれら $r-1$ 個の関数とその微分とで表わし得ることになる。この

結果は仮定に反する。r という数は形式 Φ のクラスとよばれる。

II　微分形式の特性系

41.　非常に一般なこの定理は，重要な結果を導くが，これによればこの定理の真価をさらによく知ることができる。

形式 Φ を不変形式として許容する最も一般な微分方程式系は，これを変数 $y_1, \cdots, y_n$ を用いて書けば，以上によって

$$\frac{dy_1}{0}=\cdots=\frac{dy_r}{0}=\frac{dy_{r+1}}{Y_{r+1}}=\cdots=\frac{dy_n}{Y_n} \tag{3}$$

である。ただしここに $Y_{r+1}, \cdots, Y_n$ は任意の関数である。これからすぐに，これらの系に共通な第一積分はすべて，$y_1, \cdots, y_r$ の関数であることが導かれる。したがってもし形式 Φ が，r 個の量 $z_1, \cdots, z_r$ とその微分を用いて，第二の仕方で書き表わされたとすれば，z_i は y_i の関数であり，その逆も成立する。なぜなら，z_i は Φ を不変形式として許容するすべての微分方程式系に共通な第一積分であるからである。これは，形式 Φ を最小数の変数とその微分とで表わす方法は，本質的には唯一つであることを意味している。その意味は，最小数 r 個の量 $y_1, \cdots, y_r$ を含む一つの式があれば，他はすべて y に任意の変数変換を施して得られるという意味である。もちろんこの結論は，もし r が変数の最小数でなければ，明らかに成立しない。

42.　これから導かれるもう一つの結果はつぎのものである。いくつかの，たとえば三つの n 変数微分方程式系

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n},$$

$$\frac{dx_1}{X_1'}=\frac{dx_2}{X_2'}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n'},$$

$$\frac{dx_1}{X_1''}=\frac{dx_2}{X_2''}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n''}$$

は，もし

$$\lambda X_1+\lambda' X_1'+\lambda'' X_1''=0,$$
$$\lambda X_2+\lambda' X_2'+\lambda'' X_2''=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\lambda X_n+\lambda' X_n'+\lambda'' X_n''=0$$

となるような，全部は0でない三つの係数 $\lambda, \lambda', \lambda''$ を見いだし得ないならば，互いに一次独立であるということにしよう。

反対の場合には，これらは一次従属であるという。

いくつかの微分方程式系が一次独立である，または一次従属という性質は，明らかに任意の変数変換によって保存される。

Φ を不変形式として許容する微分方程式系 (3) のうちから，$n-r$ 個の一次独立な微分方程式系，すなわちただ一つを除くすべての分母 $Y_{r+1}, \cdots, Y_n$ を0として得られるものを見いだすことができる。さらに，すべての微分方程式系 (3) は，これらの特別な $n-r$ 個の微分方程式系と一次従属である。

したがって，もし形式 Φ が一次独立な $n-r$ 個の，そして $n-r$ 個だけの微分方程式系に対して不変であれば，これはまたそれに一次従属なすべての微分方程式系に対して不変であり，さらにこれらすべての微分方程式系は，r 個の独立な第一積分を共有している。

43. たとえば $n-r=2$ と仮定しよう。Φ を不変形式として許容する二つの微分方程式系，すなわち

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

$$\frac{dx_1}{X_1'}=\frac{dx_2}{X_2'}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n'}$$

が存在し，この性質をもつ他のすべての微分方程式系は，これらと一次従属で

ある。第一の微分方程式系の軌道を (C)，第二の微分方程式系の軌道を (Γ) とよぼう。n 次元空間の任意の一点 M を通って，この点を過ぎる軌道 (C) と軌道 (Γ) を引こう。つぎに (C) 上に任意の一点 P，(Γ) 上に任意の一点 Q をとろう。最後に P を通って軌道 (Γ') を，Q を通って軌道 (C′) を作図しよう。そうすればこれら二つの新しい軌道は相交わる。実際，もし $y_1, \cdots, y_{n-2}$ を考えている二つの微分方程式系に共通な第一積分，$a_1, \cdots, a_{n-2}$ をこれらの積分の点 M における数値とすれば，点 P および点 Q におけるそれらの数値はやはり同じである。したがって曲線 (C)，(Γ)，(Γ')，(C′) はいずれも同一の二次元集合体

$$y_1=a_1,\ y_2=a_2,\ \cdots,\ y_{n-2}=a_{n-2}$$

の上にある。したがって曲線 (C′) と (Γ') とは相交わる。

44. 以上の場合はちょうど，微分形式

$$\Phi=\xi\delta y\delta z+\eta\delta z\delta x+\zeta\delta x\delta y+(\eta w-\zeta v)\delta x\delta t+(\zeta u-\xi w)\delta y\delta t+(\xi v-\eta u)\partial z\delta t \tag{4}$$

に対応する，渦動の理論の二次積分不変式に現われる。

われわれはすでに，Φ を不変形式として許容する微分方程式系は，結果として三つの方程式

$$\begin{cases}\eta(dz-wdt)-\zeta(dy-vdt)=0,\\ \zeta(dx-udt)-\xi(dz-wdt)=0,\\ \xi(dy-vdt)-\eta(dx-udt)=0\end{cases} \tag{5}$$

を導くものであることをみた。(第24項)

これらの微分方程式系中で最も一般なものは

$$\frac{dx}{\lambda u+\mu\xi}=\frac{dy}{\lambda v+\mu\eta}=\frac{dz}{\lambda w+\mu\zeta}=\frac{dt}{\lambda}$$

と書くことができる。そしてこれは，二つの微分方程式系

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=\frac{dt}{1},$$

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}=\frac{dt}{0}$$

から一次結合として導かれる。これらの微分方程式系は，流体の分子の軌道と，渦動線とを定義するものである。ここに第一のそれは今のべたばかりの曲線(C) であり，第二のそれは曲線 (Γ) である。そして一般の場合に得られた性質は，ここではつぎのように言って言い表わされる。すなわち，瞬間 t に渦動線 (Γ) を形式する分子は，瞬間 t' においてもなお渦動線 (Γ') を形成する。このように Helmholtz の定理は，本章の最初に証明した一般の定理から導かれる，非常に特殊な一つの結論である。

45. 前二項ではわれわれは，$n-r=2$ であると仮定した。しかしながらこれに類似な幾何学的考察は，n および r の数値いかんにかかわらず展開することができる。これは，

$$y_1=a_1,\ y_2=a_2,\ \cdots,\ y_r=a_r$$

という形の r 個の方程式で定義され，一点がそれに含まれるような微分方程式系 (3) の軌道は，軌道全体がそれに含まれるという性質をもつ集合体の存在に基づいているのである。$n-r$ 次元であるこれらの集合体のおのおのは，任意の一点 M から出発して，この点を通って Φ を不変形式として許容する微分方程式系に属する任意の一つの微分方程式の軌道を引き，つぎにこの軌道上の任意の一点を通ってこの微分方程式系に属する他の任意の微分方程式の軌道を引き，等々としてこれを続けて得られる。これらの操作によって $n-r$ 次元の集合体全体が得られ，これから出ることは決してない。

われわれはこれらの集合体に，形式 Φ の**特性集合体**という名を与えよう。

特性集合体は，方程式

$$dy_1=0,\ dy_2=0,\ \cdots,\ dy_r=0$$

の積分から得られるとみなすことができる。さてこれらの方程式は，もとの変数 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ に戻れば，$dx_1,\ \cdots,\ dx_n$ の間の一次関係の集合で作られており，

これらは Φ を不変形式として許容する微分方程式系の任意の一つに属する方程式から導かれる結果である。

さらに簡単につぎのように言うことができる。すなわち，基本移動 (dx_1, $\cdots$, dx_n) が，Φ を不変形式として許容する微分方程式系の一つの軌道の方向に行なわれるための必要かつ十分な条件は，解析的に dx_1, $\cdots$, dx_n の間のいくつかの一次方程式で表わされる。これらの方程式は，そのうち独立なものの数は r であるとすれば，r 個の任意定数に関係し，空間のすべての点を通って一つそして唯一つ存在するというような，$n-r$ 次元の集合体を定義する。これらが特性集合体である。全微分方程式系自身は，形式 Φ の特性系と呼ばれる。

46. 簡単のために，dx_1, $\cdots$, dx_n に関する一次方程式を **Pfaff の方程式**とよび，Pfaff の方程式の一系を **Pfaff 系**と呼ぼう。n 個の変数をもった r 個の Pfaff の方程式の集まりは，従属変数と考えられた r 個の変数を，独立変数と考えられた他の $n-r$ 個の関数として定義するものとみなし得られる。しかし一般にはこのような Pfaff 系は不可能である。たとえば古典的な結果につぎのものがある。すなわち三変数の Pfaff の方程式

$$\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz=0$$

において，z を x および y の未知関数とみなせば，もしある種の積分可能条件，すなわち

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\right)+\mathrm{Q}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\right)+\mathrm{R}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right)=0$$

が満足されているのでなければ，この Pfaff の方程式は任意に与えられた初期値に対応する解を許容しない。この条件が満足されている場合には，Pfaff の方程式は完全積分可能であると言われる。

同様に，$n-r$ 個の変数の r 個の未知関数を含む r 個の方程式からなる Pfaff 系は，もしつねに変数の任意に与えられた初期値に対応する解を許容するならば，やはり完全積分可能であると言われる。これは一つの形式 Φ の特性 Pfaff

系に対して起こる事柄である。

したがって本章の基本定理はつぎのようにのべられる。

任意の微分形式 $\varPhi$ の特性 Pfaff 系はつねに完全積分可能である。

47. 最後にもう一度，渦動の理論の形式 $\varPhi$ に戻ろう。この形式の特性 Pfaff 系は，方程式 (5)，または同じことであるが

$$\frac{dx-udt}{\xi}=\frac{dy-vdt}{\eta}=\frac{dz-wdt}{\zeta}$$

で定義される。もしこのような Pfaff 系が完全積分可能であることを書き表わし得るならば，われわれは当然 Helmholtz の定理の解析的な表現に達するはずである。特性集合体は，同一の渦動線を作る分子の，すべての状態の集合で作られている。

力学の二次積分不変式に対しては，特性 Pfaff 系は運動の方程式に，特性集合体は軌道になる。

もし，すでに渦動の理論で行なったように，軌道の一部分，たとえば変数の間の同じ関係を満足する軌道だけを考えるならば，上と異なることも起こり得る。

第 5 章

不変 Pfaff 系とその特性系

I　不変 Pfaff 系の概念

48. 微分方程式系に対する不変形式の代わりに，不変方程式を考えることもできる。H. Poincaré はとくに，微分を含まぬ不変方程式系を利用している。これらの方程式系は，もしある一点がこの方程式系を満足すれば，対応する軌道にそっての移動によってこれから得られる点はすべて，やはりこの方程式系を満足するという性質をもっている。幾何学的なことばを用いていえば，不変方程式系で表わされる集合体は軌道によって生成される，となる。

さらに不変微分方程式を考えることもできる。まずせまい見地から，二つの微分方程式

(1)
$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{X}, \qquad \frac{dy}{dt}=\mathrm{Y}$$

という簡単な場合をとろう。

方程式

(2)
$$\delta y-m(x,\ y,\ t)\delta x=0$$

は，もし関係 (2) を満足する，無限に近い任意の同時的二点 $(x,\ y,\ t)$，$(x+\delta x,\ y+\delta y,\ t)$ が与えられた場合，これらをそれぞれの軌道にそって他の任意の瞬間 t' まで移動して得られる点 $(x',\ y',\ t')$ と $(x'+\delta x',\ y'+\delta y',\ t')$ がなお関係 (2) を満足する場合，すなわち，なお

$$\delta y'-m(x',\ y',\ t')\delta x'=0$$

が成立する場合には，H. Poincaré の意味で不変であると言われる。

もし方程式 (2) がいまのべたような意味で不変であれば，この方程式は

(3) $$\delta y_0 - m(x_0,\ y_0,\ 0)\delta x_0 = 0$$

と同値である。ただしここに x_0, y_0 は，点 $(x,\ y,\ t)$ を通る軌道における x, y の初期値である。さて，もし方程式 (3) において，x_0, y_0 を $(x,\ y,\ t)$ の関数とみなし，x_0, y_0 をそれらの値でおきかえれば，この方程式は明らかに

(4) $$\delta y - \mathrm{Y}\delta t - m(\delta x - \mathrm{X}\delta t) = 0$$

という形をとる。

この新しい方程式 (4) は，その起源自身によって，このことばの完全な意味において不変な意味をもっている。なぜならこの方程式は，点 $(x,\ y,\ t)$ および $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ t+\delta t)$ に対応する二つの軌道の固有な性質を表わしているからである。

幾何学的には方程式 (4) は，空間のすべての点 $\mathrm{M}(x, y, t)$ に，この点を通る一つの平面 (P) を対応させる。その不変性とは，一点 M を無限に近い点 M_1 に結ぶ直線 MM_1 が，点 M に対応する平面 (P) 内にあり，もし M と M_1 をそれぞれの軌道にそって（互いに無限に近くに保ちながら）M' および M_1' まで移動させれば，直線 $\mathrm{M}'\mathrm{M}_1'$ は点 M' に対応する平面 (P′) 内にあることを意味している。平面 (P) は点 M を過ぎる軌道に接することは注意すべきである。

以上によれば，もし曲線 (C) がその点のそれぞれで方程式 (4) を満足すれば，すなわちその積分曲線であれば，(C) の種々の点を過ぎる軌道によって生成される曲面はまた方程式 (4) の積分曲面であることは明らかである。これは方程式 (4) の形 (3) から解析的に直ちに得られる。

49. 以上の考察は容易に拡張される。一つの微分方程式系

(5) $$\frac{dx_i}{dt} = \mathrm{X}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が与えられた場合，一つの Pfaff の方程式系

$$(6)\quad \begin{cases} a_{11}\delta x_1+\cdots+a_{1n}\delta x_n+a_1\delta t=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{h1}\delta x_1+\cdots+a_{hn}\delta x_n+a_h\delta t=0 \end{cases}$$

は，もし方程式 (6) が (5) の第一積分とその微分で，たとえば

$$(7)\quad \begin{cases} a_{11}{}^0\delta x_1{}^0+\cdots+a_{1n}{}^0\delta x_n{}^0=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{h1}{}^0\delta x_1{}^0+\cdots+a_{hn}{}^0\delta x_n{}^0=0 \end{cases}$$

という形にただ一通りの仕方で書き表わし得るならば，微分方程式系 (5) に対して不変であると言われる。

これはまず，δx_i を $X_i\delta t$ でおきかえれば方程式 (6) は恒等的に満足される，ということを要求する。しかしながらこの条件は明らかに十分ではない。それはともかく，もし Pfaff 系 (6) が不変であれば，それは一つの重要な幾何学的性質をもっている。それは，Pfaff 系 (6) の任意の積分集合体が与えられた場合，この与えられた集合体の各点を通って，方程式 (5) の対応する軌道を引いて得られる集合体も，やはり積分集合体である，という性質である。事実これは，任意の一点でこの新しい集合体上を移動すれば，方程式 (7) は相変わらず満足されているからである。

(一つの集合体は，この集合体上で任意の方向 (δx_1, $\cdots$, δt) へ移動した場合に方程式 (6) が満足されているなら，これを積分集合体と呼ぶことにする。)

これからつぎの結果が得られる。すなわち，不変 Pfaff 系 (6) の積分集合体はすべて，与えられた方程式 (5) の軌道で生成されている，または，それ自身軌道で生成されている最大次元の積分集合体に属する，という性質をもっている。

II　Pfaff 系の特性系

50. n 変数 (x_1, $\cdots$, x_n) の任意の Pfaff 系

$$
(8) \qquad \begin{cases} a_{11}\delta x_1 + \cdots + a_{1n}\delta x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{h1}\delta x_1 + \cdots + a_{hn}\delta x_n = 0 \end{cases}
$$

が与えられたとし，Pfaff 系 (8) がその不変形式であるようなすべての微分方程式系

$$
(9) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}
$$

を定める問題を考えることができる。これはさらに先へいってわれわれが解決しようとする問題である。しかしながらこの問題を解かなくとも，これらすべての微分方程式系に対して一つの重要な定理を証明することができる。もっとこれは，前章において，与えられた微分形式に関して証明した定理と同一のものである。

与えられた方程式 (8) は，x の関数である r 個の量 $y_1, \cdots, y_r$ とその微分とを用いて

$$
(10) \qquad \begin{cases} b_{11}(y)\delta y_1 + \cdots + b_{1r}(y)\delta y_r = 0, \\ \cdots\cdots \\ b_{h1}(y)\delta y_1 + \cdots + b_{hr}(y)\delta y_r = 0 \end{cases}
$$

の形に書き表わすことができ，さらにこれらは r 個以下の量およびその微分を用いては書き表わし得ないと仮定しよう。この数 r は Pfaff 系のクラスとよばれる。Pfaff 系 (8) が方程式 (9) に対して不変であるための必要かつ十分な条件は，これらの方程式 (9) が $y_1, y_2, \cdots, y_r$ を第一積分として許容することである。

証明は前章におけるそれと全く同一であり，それから導かれる結論もまた同一である。とくに与えられた Pfaff 系 (8) が微分方程式系 (9) に対して不変であることを表わす方程式は，$X_1, \cdots, X_n$ に関する r 個の一次方程式に，または結局同じことであるが，$dx_1, \cdots, dx_n$ に関する r 個の一次方程式に帰着し，しかもこれら r 個の方程式は

$$dy_1=0,\ \cdots,\ dy_r=0$$

と同値な一つの Pfaff 系，すなわち完全積分可能な一つの Pfaff 系を作る。このPfaff 系は，与えられた Pfaff 系 (8) の特性系とよばれる。なお特性系の方程式は，与えられた Pfaff 系の h 個の方程式に，$r-h$ 個の他の方程式を付加して得られる。

Pfaff 系 (8) が完全積分可能であるための必要かつ十分な条件は明らかに，Pfaff 系がその特性系と一致することである。したがってもし任意の Pfaff 系の特性系を作り得るならば，それによってこの Pfaff 系が完全積分可能であることを表わし得るわけである。

51. Pfaff 系 (8) が，その特性系に対して不変であるとみなされ得ることは明らかである。Pfaff 系 (8) の積分集合体はすべて，特性集合体で生成されているか，それ自身特性集合体で生成されている最大次元の積分集合体に属するかのいずれかである。

もし一つの任意の微分形式を考え，そしてもしこの形式がある微分方程式系に対して不変であるならば，この形式の特性 Pfaff 系は，この同じ微分方程式系に対して不変である。

たとえば流体力学において，Pfaff 系

$$\frac{\delta x-u\delta t}{\xi}=\frac{\delta y-v\delta t}{\eta}=\frac{\delta z-w\delta t}{\zeta}$$

は（渦動線の微分方程式に対すると同様）流体分子の軌道の微分方程式に対して不変である。

これらすべての定理，および容易に考えられる他のすべての定理は，それに対して不変である微分方程式系の第一積分しか含まないという不変系の固有の性質から直ちに得られる結論である。

52. 一つの微分形式，または Pfaff 系，またはいくつかの微分形式と Pfaff

系の集まりを考え，与えられた微分形式，または与えられた Pfaff 系，等々の特性 Pfaff 系の第一積分を $y_1, \cdots, y_r$ で表わそう。もし微分形式，または Pfaff 系等において，その係数は度外視して微分 $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ の現われ方だけにもっぱら注意を向けるならば，これらの微分は $\delta y_1, \cdots, \delta y_r$ という結合だけにはいってくることは明らかである。しかしこれらが r 以下の個数の一次結合でだけ入ってくるということは起こり得る。いずれの場合にも，もしその形式（または Pfaff 系等）を表わし得る最小数の δx_i の一次結合を知れば，これらの一次結合を 0 とおいて得られる方程式は特性系に属する。

Ⅲ　代数形式の階数とその随伴系

53. もし代数形式に関して，われわれを特性系の概念に導いたそれと同様な定理を証明すれば，以上の考察はさらに明瞭となるであろう。

n 変数 $u_1, \cdots, u_n$ の代数形式が，変数の r 個の独立な一次結合 $v_1, \cdots, v_r$ で表わされ，しかもこれ以下の個数の一次結合では表わし得ないとし，さらにもし変数の他の r 個の一次結合 $w_1, \cdots, w_r$ を用いて表わしたこの形式の表現を得たとすれば，w_i は v_i の独立な一次結合である。

事実，与えられた変数の $2r$ 個の一次形式

$$v_1, \cdots, v_r; \quad w_1, \cdots, w_r$$

を考えよう。そしてこれらの形式中に $2r-\rho$ 個（$0 \leqq \rho \leqq r$）独立なものがあると仮定しよう。これは，同時に w の一次結合でもある，v の独立な一次結合が ρ 個存在することを意味している。これらを $t_1, \cdots, t_\rho$ とよぼう。そしてさらに $t_1, \cdots, t_\rho$ は同時に $v_1, \cdots, v_\rho$ および $w_1, \cdots, w_\rho$ の独立な一次結合であると仮定しよう。これは許されることである。そうすればわれわれは

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(t_1, \cdots, t_\rho;\ v_{\rho+1}, \cdots, v_r) = \psi(t_1, \cdots, t_\rho;\ w_{\rho+1}, \cdots, w_r)$$

という形の二重の等式を得る。

量 $t_1, \cdots, t_\rho, v_{\rho+1}, \cdots, v_r, w_{\rho+1}, \cdots, w_r$ は独立であるから，これは，た

とえば Φ が $v_{\rho+1}, \cdots, v_r$ に関係しないときにのみ可能である。これは $\rho=r$ のときにのみ仮定と両立する。これでわれわれの定理は証明された。

一次方程式系

$$v_1=v_2=\cdots=v_r=0$$

は，与えられた形式の随伴系とよばれる。随伴系の概念は明らかに，形式の集合，または代数方程式系へ拡張される。われわれは整数 r をこの形式の階数とよぶ。

これによれば，微分形式の特性系はつねに，$\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ の代数形式と考えられたこの形式を含む。しかしこれは，随伴系の方程式以外の方程式を含み得る。

第 6 章

外 積 形 式

I　二次形式の随伴系

54. ふつうの代数形式，二次形式，三次形式などについては一言のべるだけでよいであろう。

よく知られているように，二次形式

$$F(x)=\sum_{i,j}^{1\cdots n}a_{ij}u_iu_j=a_{11}u_1{}^2+a_{22}u_2{}^2+\cdots+2a_{12}u_1u_2+\cdots \tag{1}$$

は自乗の和に直される。もしこの形式の行列式が 0 でなければ，これらの平方のうち独立なものの個数は n である。(適当な一次置換によって)この形式を表わし得る変数の最小数を決定する問題を考えよう。これらの変数を得るためには，連立一次方程式

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial u_2}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial F}{\partial u_n}=0 \tag{2}$$

を考えればよい。

まずこの連立方程式が変数の選び方に無関係であることは明らかである。これが r 個の独立な方程式に帰すると仮定しよう。これらは

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \cdots,\ x_r=0$$

であるといつでも仮定することができる。

この場合形式 F は，r 個の変数 $x_1,\ \cdots,\ x_r$ を用いて表わし得られ，r 個以下の変数を用いては表わし得ない。

事実 F を，$x_1,\ \cdots,\ x_r$ と，他の独立な形式 $x_{r+1},\ \cdots,\ x_n$ を用いて表わそう。たとえば変数 x_{r+1} は，F のなかにはいってこない。なぜなら，もし x_{r+1} が F

中に $Ax_{r+1}x_\alpha$ のような項ではいっているとすれば，方程式

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=0$$

は x_{r+1} を含むことになって仮定に反するからである。

逆に，形式 F は $\rho \leqq r$ 個の変数 $y_1, y_2, \cdots, y_\rho$ を用いて表わし得られると仮定しよう。変数 $y_1, \cdots, y_\rho, \cdots, y_n$ から出発して作った形式 (2) は，明らかに変数 $y_1, \cdots, y_\rho$ しか含んでいない。したがって $\rho=r$ でなければならず，この場合連立方程式 (2) は

$$y_1=y_2=\cdots=y_r=0$$

に帰着される。したがって $y_1, \cdots, y_r$ は $x_1, \cdots, x_r$ の独立な一次結合である。

この証明の最後の部分は，すでにわれわれの知っていることではあるが，形式Fの最小数の変数を用いての表わし方は，これら最小数の変数に対する一次置換を別にすれば，本質的にはただ一通りであることを示している。

連立方程式 (2) は形式 F の随伴系である。

以上のことは任意次数の斉次整形式に拡張される。たとえばもしFが一つの三次形式であれば，その随伴一次方程式系は，F のすべての第二次微分を 0 とおいて得られる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}=0$$

この連立方程式は，F を表わし得る最小数の変数を与える。

II 交代双一次形式と外積形式

55. われわれがこれから考えようとする形式は，微分を変数とみなすとき，多重積分記号のなかにはいってくる形式である。これらは特別な計算規則をもった形式であるから，それを少しく強調するのも無用ではあるまい。

二系の変数

$$u_1, \cdots, u_n; \quad v_1, \cdots, v_n$$

をもった一つの双一次形式

$$f(u, v) = \sum a_{ij} u_i v_j$$

から出発しよう。

もし二系の変数を交換してもこの形式が値を変えなければ，すなわち

$$f(v, u) = f(u, v)$$

であれば，このような形式は**対称**であると言われる。同じことを行なった場合に，もし符号のみを変えるならば，すなわち

$$f(v, u) = -f(u, v)$$

であるならば**交代**であると言われる。

この形式が対称であるために係数の満足すべき条件は

$$a_{ij} = a_{ji}$$

であり，交代であるための条件は

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \qquad a_{ii} = 0$$

である。

もし二系の変数 u_i および v_i に同一の一次変換を施すならば，形式 $f(u, v)$ は新変数 $\mathrm{U}_i, \mathrm{V}_i$ の一つの新しい双一次形式 $\mathrm{F(U, V)}$ に変わる。形式 $\mathrm{F(U, V)}$ は，もし f が対称であれば対称，f が交代であれば交代であることは明らかである。これは，二系の新変数 U および V の交換は，もとの二系の変数 u および v の交換に帰着するからである。

すべての対称な双一次関数 $f(u, v)$ には，一つの二次形式，すなわち $f(u, u)$ を対応させることができる。しかもこの対応は可逆である。もし

$$f(u, u) = \mathrm{F}(u)$$

とおけば，われわれは

$$f(u, v) = \frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_2} + \cdots + v_n \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_n}\right)$$

を得る。

交代な形式に対しては，もはやこれに類似な対応はつけ得ない。なぜならこの場合 $f(u, u)$ は恒等的に0となってしまうからである。この不便をつぎのようにして防ぐことができる。

56. まず交代双一次形式においては，u_iv_i という項の係数は全部0であり，u_iv_j という項と u_jv_i という項の係数は符号反対であることに注意しよう。したがってわれわれは

$$f(u, v)=\sum_{(ij)}a_{ij}(u_iv_j-u_jv_i)$$

と書くことができる。ただしここに右辺の和は，n 個の指標の二つずつのすべての組み合わせに対してとるものとする。したがって右辺には $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の項があるわけである。式 $u_iv_j-u_jv_i$ は行列式

$$\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$$

に他ならないのであるから，記法の約束によって，これを記号

$$u_iv_j-u_jv_i=[u_iu_j]$$

で，第一行の二つの元素を並べて書き，これをかっこで包んで表わすことができる。この記法によればわれわれは

$$f(u, v)=\sum a_{ij}[u_iu_j]$$

を得る。

同様に行列式

$$\begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix}$$

で定義される交代双一次形式を，記号 $[f(u)\ f'(u)]$ で表わすことに約束しよう。ただしここに f および f' は二つの任意の一次形式

$$f(u)=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n,$$

$$f'(u)=a_1'u_1+a_2'u_2+\cdots+a_n'u_n$$

を表わすものとする。もし前の行列式を展開すれば，われわれは直ちに

$$[f(u)f'(u)]=\begin{vmatrix} f(u) & f'(u) \\ f(v) & f'(v) \end{vmatrix}=\sum_i\sum_j a_ia_j'\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}=\sum_i\sum_j a_ia_j'[u_iu_j]$$

を得る。この最左辺と最右辺を比較すれば，$[f(u)\ \ f'(u)]$ の展開は，この式を一つの積とみなし，この積を代数の普通の規則にしたがって，しかしながら部分積においてその因数の順序を変えぬよう十分注意して展開し，同一の変数を二つ含む部分積は全部 0，相異なる二つの変数を含むすべての部分積は，その順序を変えると符号が変わると約束すれば得られることを示している。

その規則を今のべたところのこの乗法は，H. Grassmann に負うものであって，彼はこれに**外乗法**という名を与えている。

この演算を利用すれば，すべての交代双一次形式に，ただ一系の変数をもっているが外乗法を含んだ二次形式を，逆に外乗法をもったすべての二次形式には，一つの交代双一次形式を対応させることができる。

簡単のためにわれわれは，「外積形式」という代わりに単に「**外形式**」ということにしよう。

57. もし外形式 $F(u)$ において，変数に一つの一次置換を施せば，新しい形式は，たんに各部分積 $[u_iu_j]$ を新変数の関数として展開して得られる。

一つの外二次形式の偏微分 $\dfrac{\partial F}{\partial u_1}$ はたんに，その各項の偏微分の和として定義される。u_1 を含まぬ項の微分はもちろん 0 である。u_1 を含む項については，この u_1 を各部分積において最初の位置へもってきたと考えることができる。そうすれば $A[u_1u_i]$ の微分は Au_i である。たとえば

$$\frac{\partial[u_1u_2]}{\partial u_1}=u_2,\quad \frac{\partial[u_1u_2]}{\partial u_2}=-u_1,\quad \frac{\partial[u_1u_2]}{\partial u_3}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial[u_1u_2]}{\partial u_n}=0$$

である。これらの約束によれば，われわれは

$$2F(u)=\left[u_1\frac{\partial F}{\partial u_1}\right]+\left[u_2\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]+\cdots+\left[u_n\frac{\partial F}{\partial u_n}\right]$$

を得る。ただしここに右辺の部分積は外積である。

もし $F(u)$ が交代形式 $f(u, v)$ に対応すれば，われわれは明らかに

$$f(u,v)=-\left(v_1\frac{\partial F}{\partial u_1}+v_2\frac{\partial F}{\partial u_2}+\cdots+v_n\frac{\partial F}{\partial u_n}\right)$$

を得る。ただしここに部分積は，普通の乗法の規則によって行なわれるものとする。

最後に，もし変数 u_i に一つの一次置換

$$u_i=h_{i1}U_1+\cdots+h_{in}U_n \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を施した場合，F(u) はこの置換で $\Phi(U)$ となったものとすれば，あたかも F が普通の代数形式であるかのように

$$\frac{\partial\Phi}{\partial U_k}=h_{1k}\frac{\partial F}{\partial u_1}+h_{2k}\frac{\partial F}{\partial u_2}+\cdots+h_{nk}\frac{\partial F}{\partial u_n}$$

を得ることに注意しよう。

58. F を与えられた外二次形式とするとき，連立一次方程式

(3) $$\frac{\partial F}{\partial u_1}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial u_2}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial F}{\partial u_n}=0$$

は，明らかに変数の選び方に無関係である。したがってこの連立一次方程式が，方程式

$$u_1=0,\ u_2=0,\ \cdots,\ u_r=0 \qquad (r\leqq n)$$

に帰着すると仮定することができる。

もしそうだとすれば，形式 F は $u_{r+1},\cdots,u_n$ に関係しない。実際もし F が $A[u_{r+1},u_\alpha]$ のような項を含んでいれば，方程式

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha}=0$$

は，方程式 (3) から導かれる結果にはなり得ないからである。したがって形式 F は，方程式 (3) の左辺のみを用いて表わされる。

逆に形式Fが，$\rho\leqq r$ 個の変数 $v_1, v_2, \cdots, v_\rho$ を用いて表わし得たとしよう。系

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial F}{\partial v_n}=0$$

に属する方程式の左辺は $v_1,\ \cdots,\ v_\rho$ にしか関係しない。したがってこの連立

方程式は高々 ρ 個の独立な方程式しか含んでいない。したがって $\rho=r$ であって，v_i は u_i の一次結合である。

外二次形式の**随伴系**は，その第一次の偏微分をすべて0とおいて得られる。

59. この結果はこれをさらに精密にすることができる。われわれは階数 r が必然的に偶数であることを示し，同時に，外二次形式に対して，ふつうの二次形式に対する平方の和と同じ役割を演ずる標準形を見いだそう。

考えを定めるために $F(u)$ の係数 a_{12} は0でないと仮定して，形式

$$\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]=\frac{1}{a_{12}}[(a_{12}u_2+a_{13}u_3+\cdots+a_{1n}u_n)(a_{21}u_1+a_{23}u_3+\cdots+a_{2n}u_n)]$$

を考えよう。この形式は，

$$[u_1u_2],\ [u_1u_3],\ \cdots,\ [u_1u_n],\ [u_2u_3],\ \cdots,\ [u_2u_n]$$

という項に対しては，すなわち少なくも変数 u_1 および u_2 の一方を含む項に対しては，F と同じ係数をもっている。したがって形式

$$F(u)-\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]=F'(u)$$

はもはや変数 $u_3, u_4, \cdots, u_n$ しか含んでいない。つぎにこの形式の係数 a_{34}' は0でないと仮定しよう。そうすれば前と同様にして，形式

$$F'(u)-\frac{1}{a_{34}'}\left[\frac{\partial F'}{\partial u_3}\frac{\partial F'}{\partial u_4}\right]=F''(u)$$

はもはや変数 $u_5, u_6, \cdots, u_n$ しか含んでいないのがみられるであろう。このようにつぎつぎと続けていって，ついに恒等的に0の形式に達するまでこれを続けることができる。たとえば

$$F(u)=\frac{1}{a_{12}}\left[\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial F}{\partial u_2}\right]+\frac{1}{a_{34}'}\left[\frac{\partial F'}{\partial u_3}\frac{\partial F'}{\partial u_4}\right]+\frac{1}{a_{56}''}\left[\frac{\partial F''}{\partial u_5}\frac{\partial F''}{\partial u_6}\right]$$

を得たと仮定しよう。六つの一次形式

$$\frac{\partial F}{\partial u_1},\ \frac{\partial F}{\partial u_2},\ \frac{\partial F'}{\partial u_3},\ \frac{\partial F'}{\partial u_4},\ \frac{\partial F''}{\partial u_5},\ \frac{\partial F''}{\partial u_6}$$

は明らかに独立である。

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}=U_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2}=a_{12}U_2,$$

$$\frac{\partial F'}{\partial u_3}=U_3, \qquad \frac{\partial F'}{\partial u_4}=a_{34}'U_4,$$

$$\frac{\partial F''}{\partial u_5}=U_5, \qquad \frac{\partial F''}{\partial u_6}=a_{56}''U_6$$

とおけば，形式 F は求める標準形

$$F(U)=[U_1U_2]+[U_3U_4]+[U_5U_6]$$

に直される。

この推論は明らかに一般的なものであって，標準形

$$F(U)=[U_1U_2]+[U_3U_4]+\cdots+[U_{2s-1}U_{2s}] \qquad (2s\leqq n)$$

を与える。この随伴系は明らかに

$$U_1=U_2=\cdots=U_{2s}=0$$

である。この結果は，さらに先へいって非常に大きな重要性をもつにいたる。

60. 外二次形式のその標準形への変形は，明らかに無限に多くの仕方で可能である。一つの標準形を他の標準形へ移す一次置換の集合は，$s(2s+1)$ 個の任意の媒介変数に関係する一つの重要な群を作る。もし $s=1$ であれば，二変数のこれらの置換は，1 に等しい行列式をもつという条件で特長づけられる。

III 二次以上の外形式

61. われわれは任意次数の外形式を考えることができる。われわれは p 系の変数 u_i, v_i, $\cdots$, w_i の一次形式

$$f(u, v, \cdots, w)$$

であって，二系の変数を互いに入れかえると符号だけが変わるという条件を満足するものから出発して，最も自然にこれに達することができる。たとえば $p=3$ の場合には，この仮定から，同一の指標が二度はいってくる項の係数は 0 であ

り，三つの相異なる指標，たとえば 1, 2, 3 のはいってくる項の集合は

$$a_{123}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

の形であることがわかる。

以上と同じ記法の約束によって，配分的ではあるが，しかし交換可能ではない乗法の法則が得られる。ここに各部分積は，そこにはいってくる変数の二つを入れかえると符号が変わる。したがって

$$[u_1u_2u_3]=-[u_2u_1u_3]=-[u_1u_3u_2]=-[u_3u_2u_1]=[u_2u_3u_1]=[u_3u_1u_2]$$

を得る。これによって

$$[\mathrm{F}\Phi\Psi]$$

のような外積を定義することができる。ただしここに F, Φ, Ψ は任意次数の外形式である。積の次数は因数の次数の和である。もし次数の和が n をこえれば，積は必然的に 0 である。もし積における二つの因数を互いに入れ変えるならば，この因数の少なくも一方が偶数次のときは積は不変であり，因数の両方が奇数次のときは積の符号が変わることが容易に認められる。この種の積の和が同様にして定義される。

とくに一つの形式にそれ自身をかけた積は，もしこの形式が奇数次ならば 0 である。しかしながらもしこれが偶数次ならばこの積は必ずしも 0 ではない。たとえばその標準形

$$\mathrm{F}=[u_1u_2]+[u_3u_4]+\cdots+[u_{2s-1}u_{2s}]$$

に直された二次形式 F をとろう。われわれは

$$\frac{1}{2}[\mathrm{F}^2]=[u_1u_2u_3u_4]+[u_1u_2u_5u_6]+\cdots+[u_{2s-3}u_{2s-2}u_{2s-1}u_{2s}],$$

$$\frac{1}{3!}[\mathrm{F}^3]=[u_1u_2u_3u_4u_5u_6]+\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{s!}[\mathrm{F}^s]=[u_1u_2u_3u_4\cdots u_{2s-1}u_{2s}],$$

$$\frac{1}{(s+1)!}[F^{s+1}]=0$$

を得る。

したがって二次形式 F の階数 2s は，F を累乗しても 0 にならない最大指数の 2 倍である。

行列式の理論への簡単な応用の一つにつぎのものがある。

$$F=a_{12}[u_1u_2]+a_{13}[u_1u_3]+a_{14}[u_1u_4]+a_{23}[u_2u_3]+a_{24}[u_2u_4]+a_{34}[u_3u_4]$$

を四変数の一つの形式とする。そうすればわれわれは

$$\frac{1}{2}[F^2]=(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})[u_1u_2u_3u_4]$$

を得る。他方 F の随伴系は

$$\begin{aligned} a_{12}u_2+a_{13}u_3+a_{14}u_4&=0,\\ a_{21}u_1\qquad\quad +a_{23}u_3+a_{24}u_4&=0,\\ a_{31}u_1+a_{32}u_2\qquad\quad +a_{34}u_4&=0,\\ a_{41}u_1+a_{42}u_2+a_{43}u_3\qquad\quad &=0 \end{aligned}$$

である。

この形式が四以下の変数を用いて書き表わされ得るための条件は，一方では $[F^2]=0$，すなわち

$$a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}=0$$

であり，他方では，随伴系の行列式が 0，すなわち

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{vmatrix}=0$$

である。

これら二つの方程式は，その外見にかかわらず等値である。実際偶数次で交代であるこの行列式は，式

$$a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}=0$$

の平方であることが証明される。

62.（変数の数に等しい）n 次の外形式はすべて，

$$A[u_1u_2\cdots u_n]$$

の形である。

次数が $n-1$ または $n-2$ の場合には標準形を得ることができる。与えられた形式の補形式の概念によって容易にこれに達することができる。

一つの p 次の形式 F を考え，不定の係数をもった一次形式を $\xi, \xi', \xi'', \cdots, \xi^{(n-p-1)}$ で表わそう。

$$\xi=\xi_1u_1+\cdots+\xi_nu_n,$$
$$\xi'=\xi_1'u_1+\cdots+\xi_n'u_n,$$
$$\cdots\cdots$$

外積 $[F\xi\xi'\cdots\xi^{(n-p-1)}]$ は次数 n である，したがって

$$\varPhi[u_1u_2\cdots u_n]$$

の形である。ここに係数 $\varPhi$ は各係数 ξ の系に関して一次であり，しかも交代である。したがってこれに，変数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ の $n-p$ 次の外形式が対応する。これを形式 F の**補形式**と定義する。

もし u に一つの一次置換を施し，同時に ξ に対して式 $\xi_1u_1+\cdots+\xi_nu_n$ を不変にする一次置換を施せば，式 $\varPhi[u_1u_2\cdots u_n]$ は明らかに不変である。言いかえれば，補形式には変数 u に対して施された置換の行列式がかかる。

形式 $F=F_1+F_2$ の補形式は明らかに補形式 $\varPhi_1$ と $\varPhi_2$ の和である。同様に aF の補形式は $a\varPhi$ である。ただしここに a は一つの数係数である。これによれば，任意の形式の補形式を計算するためには，

$$F=[u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \cdots, u_{\alpha_p}]$$

のような単項形式の補形式を計算することを知ればよい。上に与えた定義をあてはめてわれわれは

$$\varPhi=[\xi_{\alpha_{p+1}}, \cdots, \xi_{\alpha_n}]$$

を見いだす。ただしここに指標 $\alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_n$ は，指標 $1, 2, \cdots, n$ のうち系列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 中に現われない指標である。これらの指標は全系列

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_n$$

が偶順列となるような順序に並べられているものとする。

63. これによって，形式Fは $n-1$ 次の形式であると仮定しよう。補形式は1次の形式となる。したがってこれは，たとえば ξ_n に直されていると仮定することができる。したがってFは，つねに

$$F=[u_1u_2\cdots u_{n-1}]$$

という形に直され得る。

こんどはFが $n-2$ 次であると仮定しよう。形式 Φ は二次となる。したがってこれはつねに，公式

$$\Phi=[\xi_1\xi_2]+\cdots+[\xi_{2s-1}\xi_{2s}]$$

で与えられると仮定することができる。したがって

$$F=[u_3u_4u_5\cdots u_n]+[u_1u_2u_5u_6\cdots u_n]+\cdots+[u_1u_2\cdots u_{2s-2}u_{2s+1}\cdots u_n]$$

を得る。

もし $s=1$ であれば，Fは単項形式となる。

たとえばもし $n=5$ であれば，$5-2=3$ 次の形式Fはすべて，標準形

$$F=[u_3u_4u_5],$$

$$F=[u_1u_2u_5]+[u_3u_4u_5]$$

のいずれかに直される。

もし $n=6$ であれば，次数4の形式Fはすべて，形式

$$F=[u_3u_4u_5u_6],$$

$$F=[u_3u_4u_5u_6]+[u_1u_2u_5u_6]=[([u_1u_2]+[u_3u_4])u_5u_6],$$

$$F=[u_3u_4u_5u_6]+[u_1u_2u_5u_6]+[u_1u_2u_3u_4]$$

$$=\frac{1}{2}[[u_1u_2]+[u_3u_4]+[u_5u_6]]^2$$

のいずれか一つに直され得る。

補形式の概念によれば，次数の和が n をこえる二つの形式の積を定義することができる。これは，H. Grassmann が回帰外乗積と呼んだ演算であるが，

われわれはこれを利用しない。

64. さらに外乗積の応用を二，三あげておこう。

$f_1, f_2, \cdots, f_h$ を h 個の独立な一次形式としよう。

F を任意の外形式とするとき，方程式

$$[Ff_1f_2\cdots f_h]=0$$

は，F が変数の間に関係

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \cdots,\ f_h=0$$

を与えれば0となるための必要かつ十分な条件を与える。

実際，まず問題を $f_i=u_i$ という場合に直すことができる。この場合もしFの項がすべて，変数 $u_1, u_2, \cdots, u_h$ のうちの少なくも一つを含んでいれば，積 $[Fu_1u_2\cdots u_h]$ が0であることは明らかである。逆にもしこの積が0であれば，F の任意の項は因数として変数 $u_1, \cdots, u_h$ の少なくも一つを含んでいる。実際もしそうでなかったとすれば，この項に $[u_1\cdots u_h]$ をかけたものは0でない積を与え，これは他のいかなる項とも消し合わないからである。

IV　外形式の随伴系

65. 随伴系の決定は，二次形式に対すると同様，任意次数の外形式に対しても容易に行なわれる。もしその形式が次数 p であれば，その随伴系は実際 F の $p-1$ 次のすべての偏微分を0とおいて得られる。$\dfrac{\partial F}{\partial u_1}$ のような第一次の微分は，F のこの変数を含む項の集合において，u_1 を各項の最初の位置へくるようあらかじめ準備をしておいたときの u_1 の係数として定義される。この微分 $\dfrac{\partial F}{\partial u_1}$ はもはや u_1 に関係しないことに注意を要する。微分 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_2}$ は $\dfrac{\partial F}{\partial u_1}$ の u_2 に関する微分と定義される。したがってこれは，二つの変数 u_1 と u_2 を同時に含む F の項の集合をとり，これらの項のおのおのにおいて変数 u_1 を最初の位置へ，変数 u_2 を第二の位置へ移し，最後にこれらの項のすべてにおいて

二つの変数 u_1 と u_2 を取り去って得られる。これによれば

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u_2 \partial u_1}$$

を得る。

高次の偏微分もこれと同様にして定義される。これらは必ず全部異なる変数に対してとられるべきである。

次数が n で恒等的に 0 ではない形式の階数は明らかに n に等しい。次数 $n-1$ の形式の階数は $n-1$ である。次数 $n-2$ の形式の階数は，もしこれが一つの単項形式に直されるならば $n-2$ に等しく，その他のすべての場合には n に等しい。もし次数が $n-2$ よりも小であれば，階数については先験的に何も言うことはできない。

V　外二次形式に関する公式

66. n 変数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ の外二次形式 F の場合にもどろう。これらの変数が一つの一次関係

$$f \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$$

で結ばれていると考えることがある。

たとえば u_n を，与えられた関係を用いて $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ の関数として表わしたと考えた場合の形式 F は，その随伴系中の一次独立な方程式の数に対応して，ある階数をもっている。この随伴系は明らかに方程式

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} - \frac{a_1}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial F}{\partial u_{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{\partial F}{\partial u_n} = 0, \quad f = 0,$$

またはさらに

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u_1}}{a_1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u_2}}{a_2} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u_n}}{a_n}, \quad f = 0$$

をもっている。

さらに一般に，変数は任意個数の関係式

$$f \equiv a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0,$$
$$g \equiv b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + b_nu_n = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$h \equiv l_1u_1 + l_2u_2 + \cdots + l_nu_n = 0$$

で結ばれていると考えることができる。

この場合 F の随伴系は，公式

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F}{\partial u_1} & \dfrac{\partial F}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial F}{\partial u_n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_n \end{matrix} \right\| = 0, \quad f=0, \quad g=0, \quad \cdots, \quad h=0$$

で定義される。

上に書いた行列を 0 とおいたものは，この行列の行と同数の列とで作られたすべての行列式を 0 とおいたものを表わしている。

変数が与えられた関係で結ばれていると考えた時の形式 F の階数 $2s'$ は，形式

$$[fg\cdots hF^{s'}]$$

が 0 でないような，最大の指数の 2 倍であることに注意することができる。

67. とくに $n=2s$ であって，形式 F が階数 n であると仮定しよう。もし変数をただ一つの関係で結んだとすれば，この形式の階数が $n-1=2s-1$ を越え得ないことは確かである。しかもこの階数は偶数であるから，これは高々 $2s-2$ に等しい。なおこれがこの限界以下に降り得ないことも容易にみられる。

これから，もし変数を一次独立な p 個の関係で結べば，F の階数は高々 $2p$ だけ減ずることがわかる。いかなる場合に最大の降下が起こるかを調べよう。もしこれらの関係が

$$f_1=0, \quad f_2=0, \quad \cdots, \quad f_p=0$$

であれば

(4)
$$[f_1 f_2 \cdots f_p F^{s-p+1}]=0$$

となることが必要かつ十分である。

この条件は，さらに簡単な他の条件でおきかえることができる。実際もし与えられた p 個の関係のうちの任意の二つをとれば，これら二つの関係は必然的に F の階数を 4 だけ減ずる。したがってわれわれは

(5)
$$[f_i f_j F^{s-1}]=0 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

を得る。われわれはこれら $\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個の必要な方程式がまた十分であることを証明しよう。

事実これらの条件が満足されていると仮定し，f_i を u_i とするような変数の変換を行なう。したがってわれわれは

$$[u_i u_j F^{s-1}]=0$$

を得る。これは，$F^{s-1}(u)$ の補形式 $\Phi(\xi)$ において，$[\xi_i \xi_j]$ の項は存在しないことを示している。さて F^{s-q} の補形式は Φ^q である。これは F がその標準形に直されていると仮定して容易に知ることができる。したがって F^{s-p+1} の補形式，すなわち Φ^{p-1} の各項は，変数 ξ_{p+1}，$\cdots$，ξ_n のうちの少なくも $p-1$ 個を含んでいる。なぜなら，Φ の各項はこれら変数の少なくも一つを含んでいるからである。したがって Φ^{p-1} の各項は高々変数 ξ_1，$\cdots$，ξ_p の $p-1$ 個を含んでいる。したがって Φ^{p-1} の補形式は変数 u_1，$\cdots$，u^p のうちの少なくも一つを含んでいる。これは結局

$$[u_1 u_2 \cdots u_p F^{s-p+1}]=0$$

であるということである。これで証明された。

以上の定理の利点は容易に明らかにされる。形式 $[f_i f_j F^{s-1}]$ は次数 n であるから，書くべき方程式の数は $\dfrac{p(p-1)}{2}$ である。一方形式 $[f_1 f_2 \cdots f_p F^{s-p+1}]$ は次数 $n-p+2$ であるから，これが 0 であることを表わす方程式の数は ${}_nC_{p-2}$ であり，しかもそのおのおのは与えられたすべての関係式の係数を含んでいる。

たとえばもし

$$\mathrm{F}=[u_1u_2]+[u_3u_4]+[u_5u_6],$$

$$f_1=a_1u_1+\cdots+a_6u_6,$$

$$f_2=b_1u_1+\cdots+b_6u_6,$$

$$f_3=c_1u_1+\cdots+c_6u_6$$

であれば，三つの関係 $f_1=f_2=f_3=0$ を考えに入れたときの F の階数が $6-6=0$ であるための条件は，最初の方法によれば

$$[f_1f_2f_3\mathrm{F}]=0$$

である。これから

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_5 & b_6 \\ c_2 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_5 & a_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 \\ c_3 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_5 & a_1 & a_2 \\ b_5 & b_1 & b_2 \\ c_5 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_4 \\ b_5 & b_3 & b_4 \\ c_5 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_6 & a_1 & a_2 \\ b_6 & b_1 & b_2 \\ c_6 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_6 & a_3 & a_4 \\ b_6 & b_3 & b_4 \\ c_6 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}=0$$

が得られる。

これに反して上の定理は，求める条件をさらに非常に簡単な形

$$b_1c_2-c_1b_2+b_3c_4-c_3b_4+b_5c_6-c_5b_6=0,$$

$$c_1a_2-a_1c_2+c_3a_4-a_3c_4+c_5a_6-a_5c_6=0,$$

$$a_1b_2-b_1a_2+a_3b_4-b_3a_4+a_5b_6-b_5a_6=0$$

におく。

68. 上の定理よりはさらに精密で，変数が与えられた p 個の方程式で結ばれているとしたとき，F がそれになる形式の階数を最も簡単に見いだすことを可能ならしめる，一つの定理を示すことができる。そのために交代双一次形式

$$\Phi(\xi,\ \xi')=\sum a_{ij}\xi_i\xi_j'$$

を，等式

$$s[F^{s-1}(\xi_1 u_1+\cdots+\xi_n u_n)(\xi_1' u_1+\cdots+\xi_n' u_n)]=\Phi(\xi,\ \xi')[F^s]$$

で定義しよう。外二次形式

$$\Phi(\xi)=\sum a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

は（一つの因数を別にすれば）$\dfrac{F^{s-1}}{(s-1)!}$ の補形式である。これは，もし変数 u_1, $\cdots$, u_n に任意の一次変換を施し，変数 ξ_1, $\cdots$, ξ_n に $\xi_1 u_1+\cdots+\xi_n u_n$ を変えない一次置換を施し，最後にもしこれら二つの置換によって二つの形式 $F(u)$ と $\Phi(\xi)$ がそれぞれ $\bar{F}(\bar{u})$ および $\bar{\Phi}(\bar{\xi})$ になったとすれば，なお

$$s[\bar{F}^{s-1}(\bar{\xi}_1\bar{u}_1+\cdots+\bar{\xi}_n\bar{u}_n)(\bar{\xi}_1'\bar{u}_1+\cdots+\bar{\xi}_n'\bar{u}_n)]=\bar{\Phi}(\bar{\xi},\ \bar{\xi}')[\bar{F}^s]$$

が成立するという意味において，一つの絶対共変式である。

とくに F がその標準形

$$F=[u_1u_2]+[u_3u_4]+\cdots+[u_{2s-1}u_{2s}]$$

に直されているとすれば，直ちに Φ に対する標準形

$$\Phi=[\xi_1\xi_2]+\cdots+[\xi_{2s-1}\xi_{2s}]$$

が見いだされる。

これから容易に，一般的な恒等式

(6) $$\left[\frac{F^{s-p}}{(s-p)!}(\xi_1u_1+\cdots+\xi_nu_n)(\xi_1'u_1+\cdots+\xi_n'u_n)\cdots(\xi_1^{(2p-1)}u_1+\cdots+\xi_n^{(2p-1)}u_n)\right]=\frac{\Phi^{(p)}(\xi,\ \xi',\ \cdots,\ \xi^{(2p-1)})}{p!}\left[\frac{F^s}{s!}\right]$$

が導かれる。ここに交代多重一次形式 $\Phi^{(p)}$ に対応する p 次の外形式は $[\Phi^p(\xi)]$ に等しい。この恒等式は F がその標準形に直されているときには明らかである。したがって一般の場合にも真である。これは結局，前項でのべたところの，$[F^{s-p}]$ の補形式は一つのスカラー因数を別にすれば $[\Phi^p]$ に等しいという性質と結局同じものである。

とくに $p=2$ とし，恒等式 (6) 中で $[\xi_i\xi_j'\xi_k''\xi_l''']$ の項をとれば

(7) $$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}u_iu_ju_ku_l\right]=(a_{ij}a_{kl}+a_{ik}a_{lj}+a_{il}a_{jk})\left[\frac{F^s}{s!}\right]$$

を得る。ただしここに係数 a_{ij} は

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}u_iu_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right]$$

で定義される。

最後にこれから，さらに先へいって有用な他の恒等式を導くことができる。形式

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}u_iu_ju_k\right]-\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}(a_{ij}u_k+a_{jk}u_i+a_{ki}u_j)\right]$$

を考えよう。これは次数 $2s-1$ である。もしこれに変数 u_1，$\cdots$，u_{2s} のうちの一つ，たとえば u_l を外的にかければ，(7) によってこの積は 0 であることが直ちに認められる。したがってこの形式はそれ自身恒等的に 0 である。u_i，u_j，u_k は，変数の三つの任意の一次形式でおきかえられるから，われわれはつぎの定理に達する。すなわち

任意個数の一次形式 f_1，f_2，$\cdots$，f_p を考えて

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}f_if_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right]\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

とおけば，恒等式

$$\left[\frac{F^{s-2}}{(s-2)!}f_if_jf_k\right]=\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}(a_{ij}f_k+a_{jk}f_i+a_{ki}f_j)\right]\tag{8}$$

を得る。

69. 変数が一次独立な p 個の関係式

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \cdots,\ f_p=0$$

で結ばれていると仮定したときに F がそれに直る形式の階数を見いだすという，上にのべた問題にもどろう。これらの関係式は

$$u_1=0,\ u_2=0,\ \cdots,\ u_p=0$$

であると仮定することができる。もし最初の p 個の変数 u_1，$\cdots$，u_p が互いに変換されているという条件さえ満足されていれば，u に対して任意の一次変換を施すことができる。これから終わりの $2s-p$ 個の変数 ξ_{p+1}，$\cdots$，ξ_{2s} が互い

に変換されているという条件さえ満足されていれば，変数ξに対して任意の一次変数を施し得ることがわかる。したがって

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}u_i u_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right] \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

とおこう。もし Φ において $\xi_{p+1}, \cdots, \xi_{2s}$ の項を取り去れば，われわれは明らかに

$$\bar{\Phi}=\sum_{(i,\ j)}^{1,\cdots,p} a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

を得る。

$2q$ を形式 $\bar{\Phi}$ の階数としよう。$\xi_1, \cdots, \xi_p$ に施された適当な一次変換によって，$\bar{\Phi}$ を

$$\bar{\Phi}=[\xi_1\xi_2]+\cdots+[\xi_{2q-1}\xi_{2q}]$$

に直すことができる。したがって，必要とあらば $\xi_1, \cdots, \xi_p$ から $\xi_{p+1}, \cdots, \xi_{2s}$ の一次結合を引き去って（これは許されることである）Φ を

$$\Phi=[\xi_1\xi_2]+\cdots+[\xi_{2q-1}\xi_{2q}]+[\xi_{2q+1}\xi_{p+1}]+\cdots+[\xi_p\xi_{2p-2q}]$$
$$+[\xi_{2p-2q+1}\xi_{2p-2q+2}]+\cdots+[\xi_{2s-1}\xi_{2s}]$$

に直すことができる。

しかしながら形式 F は，この場合

$$F=[u_1u_2]+\cdots+[u_{2q-1}u_{2q}]+[u_{2q+1}u_{p+1}]+\cdots+[u_pu_{2p-2q}]+\cdots+[u_{2s-1}u_{2s}]$$

に直される。

したがってもし関係

$$u_1=0,\ u_2=0,\ \cdots,\ u_p=0$$

を考えに入れれば，F の階数は $2p-2q$ だけ減ずる。

したがってわれわれはつぎの定理に到達する。

一次独立な形式 $f_1, f_2, \cdots, f_p$，等式

$$\left[\frac{F^{s-1}}{(s-1)!}f_i f_j\right]=a_{ij}\left[\frac{F^s}{s!}\right]$$

で定義される $\dfrac{p(p-1)}{2}$ 個の量 a_{ij}，および p 変数 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ の外二次形式

$$\Phi(\xi)=\sum_{(i,j)}^{1,\cdots,p}a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

を考えよう。もしこの形式が階数 $2q$ であれば，変数が p 個の関係

$$f_1=0,\ f_2=0,\ \cdots,\ f_p=0$$

で結ばれていると考えた場合の形式 F の階数は $2p-2q$ だけ減ずる。

さらに，もし与えられた p 個の一次形式に対して，Φ をその標準形

$$\Phi=[\xi_1\xi_2]+\cdots+[\xi_{2q-1}\xi_{2q}]$$

に直すような一次変換を施せば，形式 F は標準形

$$\mathrm{F}=[f_1f_2]+\cdots+[f_{2q-1}f_{2q}]+[f_{2q+1}f_{p+1}]+\cdots+[f_pf_{2p-2q}]+\cdots[f_{2s-1}f_{2s}]$$

に直される。ただしここに $f_{p+1},\cdots,f_{2s}$ は，互いに独立で，しかも与えられた形式とも独立な，適当に選ばれた新しい一次形式である。

とくにもし $q=0$ であれば，前にのべて証明した（第67項）定理が見いだされる。

第 7 章

外微分形式とその導形式

I　Pfaff 形式の双一次共変式

70. さて，一次微分形式（Pfaff の形式）

$$\omega_\delta = a_1\delta x_1 + a_2\delta x_2 + \cdots + a_n\delta x_n$$

を考えよう。

われわれはこの形式から，二系の微分をもった交代双一次形式，すなわち

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = \sum a_i(\delta\delta' x_i - \delta'\delta x_i) + \sum(\delta a_i\delta' x_i - \delta x_i\delta' a_i)$$

を導くことができる。

二つの微分記号は互いに交換可能である，すなわち右辺において

$$\delta\delta' x_i = \delta'\delta x_i$$

であると仮定しよう。上の右辺をわれわれは形式 ω の**双一次共変式**とよぶ。われわれはこれに一つの外二次微分形式を対応させることができる。上に行なった約束によってわれわれは，これを

$$\omega_\delta' = \sum_i [\delta a_i \delta x_i] = \sum_{(i,\,j)} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)[\delta x_i \delta x_j]$$

と書く。この形式は与えられた形式 ω の**外微分**とよばれる。

この微分の操作は，変数の選択とは独立な意味をもっている。さらにこれは，閉曲線にそっての線積分から，この閉曲線によってかこまれる面積にそっての面積分へ移る操作である。

たとえば，もし三つの変数 x, y, z をとって

$$\omega_\delta = \mathrm{P}\delta x + \mathrm{Q}\delta y + \mathrm{R}\delta z$$

とおけば，われわれは

$$\omega_\delta' = [\delta P\delta x]+[\delta Q\delta y]+[\delta R\delta z]=\frac{\partial P}{\partial x}[\delta x\delta x]+\frac{\partial P}{\partial y}[\delta y\delta x]+\frac{\partial P}{\partial z}[\delta z\delta x]$$

$$+\frac{\partial Q}{\partial x}[\delta x\delta y]+\frac{\partial Q}{\partial y}[\delta y\delta y]+\frac{\partial Q}{\partial z}[\delta z\delta y]$$

$$+\frac{\partial R}{\partial x}[\delta x\delta z]+\frac{\partial R}{\partial y}[\delta y\delta z]+\frac{\partial R}{\partial z}[\delta z\delta z]$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)[\delta y\delta z]+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)[\delta z\delta x]+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)[\delta x\delta y]$$

を得る。したがって Stokes の公式は

$$\int_C \omega_\delta = \iint_S \omega_\delta'$$

と書かれる。ただしここに S は，周囲 C でかこまれる面積である。

ω' が 0 になるための必要かつ十分な条件は，ω が完全微分であることである。

注意。二つの微分記号 δ および δ' の変換可能性は，微分が独立変数の任意の関数 y に施されるときに起こらなければならない。そうでなければ，いま定義した演算は共変的な性質をもたない。さて，これは容易に験証されることである。もし

$$\omega_\delta = \delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\delta x_n$$

とおけば ω_δ は一つの完全微分であって，われわれは

$$\delta\omega_{\delta'} - \delta'\omega_\delta = 0,$$

すなわち

$$\delta\delta' y = \delta'\delta y$$

を得る。

II 外　微　分

71. これと同じ微分の操作が，任意次数の外微分形式にあてはまる。たとえ

ば二次形式

$$\Omega=\sum a_{ij}[\delta x_i\delta x_j]$$

をとろう。そしてこれに対応する交代双一次形式

$$\Omega(\delta,\delta')=\sum a_{ij}(\delta x_i\delta' x_j-\delta x_j\delta' x_i)$$

を考えよう。そして互いに交換可能な三つの微分記号 $\delta, \delta', \delta''$ を導入しよう。そして最後に

$$\delta\Omega(\delta',\delta'')-\delta'\Omega(\delta,\delta'')+\delta''\Omega(\delta,\delta')$$

という式を考えよう。これは明らかに変数の選択と独立な固有な意味をもっている。計算を行なえば容易に，この式が一つの交代三重一次形式

$$\Omega'(\delta,\delta',\delta'')=\sum[\delta a_{ij}(\delta' x_i\delta'' x_j-\delta' x_j\delta'' x_i)-\delta' a_{ij}(\delta x_i\delta'' x_j-\delta x_j\delta'' x_i)$$
$$+\delta'' a_{ij}(\delta x_i\delta' x_j-\delta x_j\delta' x_i)]$$

になることが確かめられる。

さてこの三重一次形式には，一つの外三次微分形式

$$\Omega_{\delta}'=\sum[\delta a_{ij}\delta x_i\delta x_j]=\sum\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)[\delta x_i\delta x_j\delta x_k]$$

が対応する。われわれはこれを Ω の**導形式**とよぼう。

72. 上に調べた場合において，外二次形式の微分の操作と，閉曲面にそっての二重積分からこの曲面によってかこまれる体積にわたる三重積分へ移る操作との間にある関係をよく理解しておくことが大切である。

そのために $x_1,\cdots,x_n$ を三つの媒介変数 α,β,γ の関数であると考え，n 次元空間中にその辺が座標曲線の一部分であるところの基本平行六面体を考えよう。ここにこの平行六面体の頂点 A, B, C, D, E, F, G, H は，それぞれ曲線座標

$$(\alpha,\beta,\gamma),\quad(\alpha+\delta\alpha,\beta,\gamma),\quad(\alpha,\beta+\delta'\beta,\gamma),\quad(\alpha,\beta,\gamma+\delta''\gamma),$$
$$(\alpha+\delta\alpha,\beta+\delta'\beta,\gamma),\quad(\alpha+\delta\alpha,\beta,\gamma+\delta''\gamma),\quad(\alpha,\beta+\delta'\beta,\gamma+\delta''\gamma),$$
$$(\alpha+\delta\alpha,\beta+\delta'\beta,\gamma+\delta''\gamma)$$

に対応するものとする。

ここにみるように記号 $\delta, \delta', \delta''$ は，それぞれ三つの媒介変数 α, β, γ に関する微分を表わすものである。

さてこの平行六面体をかこむ表面にそっての面線分 $\iint \Omega$ を考えよう。

A から出る三つの面にそっての積分は，符号を別にすれば

$$\Omega(\delta, \delta''), \quad \Omega(\delta'', \delta), \quad \Omega(\delta, \delta')$$

である。そして，これらの積分がすべて内面にそって，またはすべて外面にそってとられるためには，これらを上の三つの式に等しくとるか，またはこの符号をかえたものにとらなければならない。もし符号をかえたものをとれば，六つの面にわたる積分の和は

$$\begin{aligned}&-\Omega(\delta', \delta'')-\Omega(\delta'', \delta)-\Omega(\delta, \delta')+[\Omega(\delta', \delta'')+\delta\Omega(\delta', \delta'')]\\&\quad+[\Omega(\delta'', \delta)+\delta'\Omega(\delta'', \delta)]+[\Omega(\delta, \delta')+\delta''\Omega(\delta, \delta')]\\&\quad=\delta\Omega(\delta', \delta'')+\delta'\Omega(\delta'', \delta)+\delta''\Omega(\delta, \delta')\end{aligned}$$

である。したがって面積分 $\iint \Omega$ は，確かに体積分 $\iiint \Omega'$ に変形される。

三変数という簡単な場合には，もし

$$\Omega=\mathrm{P}[\delta y \delta z]+\mathrm{Q}[\delta z \delta x]+\mathrm{R}[\delta x \delta y]$$

とおけば

$$\Omega'=[\delta\mathrm{P}\delta y \delta z]+[\delta\mathrm{Q}\delta z \delta x]+[\delta\mathrm{R}\delta x \delta y]=\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\right)[\delta x \delta y \delta z]$$

を得る。

73. これらの考察は，任意次数の外形式に拡張される。すべての外形式は，次数の一つ増加した導形式を許容する。そしてその計算は非常に簡単である。なぜなら

$$\mathrm{A}[\delta x_i \delta x_j \cdots \delta x_l]$$

という形の各項は，微分された項

$$[\delta\mathrm{A}\delta x_i \delta x_j \cdots \delta x_l]$$

を与えるからである。

有用でしかも証明の容易な二，三の公式をあげておこう。

もし m が一つの係数，すなわち変数の微分を含まぬ関数であり，Ω が任意の外形式であれば，われわれは

$$(m\Omega)'=[\delta m\Omega]+m\Omega'$$

を得る。

もし Ω と Π が二つの任意の外微分形式であれば，われわれは

$$[\Omega\Pi]'=[\Omega'\Pi]\pm[\Omega\Pi']$$

を得る。ただしここに符号 + は，Ω が偶数次のときに起こり，符号 − は Ω が奇数次のときに起こるものとする。とくにもし Ω が偶数次であれば，$[\Omega^p]$ の導形式は，普通の公式

$$[\Omega^p]'=p[\Omega^{p-1}\Omega']$$

で与えられる。

74. 以上においてはわれわれは，考えている形式の係数は，第一次の偏微分を許容する連続関数であると仮定した。しかしながら，形式 Ω の係数は微分を許容しないが，それにもかかわらずその導外形式 Ω' を定義し得る場合がある。一つの古典的な例はポテンシャルの理論によって与えられる。

曲面 S で限られた物質体積 V を考えよう。ρ を V の一点における密度とする。われわれは関数 ρ は連続であると仮定する。この物質のポテンシャル U は，空間全体における連続関数であって，第一次の連続導関数を許容する。この関数に関して，公式

$$\iint\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dydz+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dzdx+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}dxdy=\iiint-4\pi\rho dxdydz$$

で表わされる（Gauss の）定理が成立する。ここに左辺の積分は任意の閉曲面にそうものであり，右辺の積分はこの曲面で限られた立体にわたる積分である。これから，

$$\Omega=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}[dydz]+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}[dzdx]+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}[dxdy]$$

とおけば，Ω の外微分 Ω' を

$$\Omega'=-4\pi\rho[dxdydz]$$

で定義し得ることがわかる。

もし関数 U が第二次の偏微分を許容すれば，これは Poisson の古典的な公式になる。なぜなら上に定義した微分の操作から直ちに

$$\Omega'=\left(\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2}\right)[dxdydz]$$

が得られるからである。しかしながらもし関数 U が第二次の偏微分を許容しない場合にも，これは関数 ρ に対してこれ以上仮定を設けない一般の場合であるが，なお微分 Ω' を定義し得る。

したがって，外微分を古典的な微分とは関係のない自動的な演算として定義し得る可能性が認められる。したがって前項の公式

(1) $$[\Omega\Pi]'=[\Omega'\Pi]\pm[\Omega\Pi']$$

を，たんに Ω と Π が外的に微分可能であるということだけを仮定して直接証明する余地があり得るわけである。

75. 外微分

$$\omega'=\mathrm{R}[\delta x\delta y]$$

を許容する二変数の一次形式

$$\omega=\mathrm{P}\delta x+\mathrm{Q}\delta y$$

という，最も簡単な場合をとろう。

関数 P および Q は連続であると仮定し，さらに連続な第一次の偏微分を許容する一つの関数 m を考えよう。ここに公式

$$(m\omega)'=m\omega'+[\delta m\omega]$$

は

$$\int m(\mathrm{P}\delta x+\mathrm{Q}\delta y)=\iint\left(m\mathrm{R}+\mathrm{Q}\frac{\partial m}{\partial x}-\mathrm{P}\frac{\partial m}{\partial y}\right)\delta x\delta y$$

となる。

この公式の証明は比較的簡単に行なわれる。A を積分領域，C をこれをかこむ曲線とする。領域 A を，たとえば軸への平行線によって，非常に多くの部分領域に分けよう。そして部分領域のおのおののなかに一点 (x_0, y_0) をとろう。そして関数 m, P, Q, $\dfrac{\partial m}{\partial x}$, $\dfrac{\partial m}{\partial y}$ のこの点における値を

$$m_0,\quad \mathrm{P}_0,\quad \mathrm{Q}_0,\quad \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0,\quad \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0$$

とよぼう。この領域の内部または周囲で

$$m=m_0+(x-x_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0+\varepsilon_1\right]+(y-y_0)\left[\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0+\varepsilon_2\right],$$

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}_0+\varepsilon_3,\quad \mathrm{Q}=\mathrm{Q}_0+\varepsilon_4$$

とおくことができよう。この部分領域のまわりにそっての積分 $\int m(\mathrm{P}\delta x+\mathrm{Q}\delta y)$ は

$$\int m_0(\mathrm{P}\delta x+\mathrm{Q}\delta y)+\int\left[(x-x_0)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right](\mathrm{P}_0\delta x+\mathrm{Q}_0\delta y)$$

に，$\varepsilon \mathrm{M}\varDelta l$ より小さな量を加えたものに等しい。ただしここに ε は ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 の上限を，M は一定の数を，$\varDelta$ はこの領域の直径を，l はそのまわりの長さを表わすものとする。この付加的な量すべての和は，明らかにいかほどでも望むだけ小ならしめ得る。なぜなら $\sum\varDelta l$ は全面積 A の程度の大きさの量であるからである。上に書いた二つの項の和は

$$\sum\iint\left[m_0\mathrm{R}+\mathrm{Q}_0\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_0-\mathrm{P}_0\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_0\right]\delta x\delta y$$

に等しい。これから容易に問題の公式の証明が得られる。

この公式は，同様な仮定のもとで，二次形式

$$\varOmega=\mathrm{P}[\delta y\delta z]+\mathrm{Q}[\delta z\delta x]+\mathrm{R}[\delta x\delta y]$$

の場合に拡張される。等式

$$\iint P\delta y\delta z+Q\delta z\delta x+R\delta x\delta y=\iiint H\delta x\delta y\delta z$$

の存在から

$$\iint m(P\delta y\delta z+Q\delta z\delta x+R\delta x\delta y)=\iiint\left(mH+P\frac{\partial m}{\partial x}+Q\frac{\partial m}{\partial y}+R\frac{\partial m}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z$$

が導かれる。

二つの三変数一次形式

$$\omega=A\delta x+B\delta y+C\delta z,$$

$$\omega_1=A'\delta x+B'\delta y+C'\delta z$$

の場合には，証明はいっそう困難のように思われる。

これら二つの形式は微分可能であり，たとえば

$$\int A\delta x+B\delta y+C\delta z=\iint P\delta y\delta z+Q\delta z\delta x+R\delta x\delta y,$$

$$\int A'\delta x+B'\delta y+C'\delta z=\iint P'\delta y\delta z+Q'\delta z\delta x+R'\delta x\delta y$$

が成立すると仮定しよう。公式 (1) はここでは

$$\iint(BC'-CB')\delta y\delta z+(CA'-AC')\delta z\delta x+(AB'-BA')\delta x\delta y$$

$$=\iiint(PA'+QB'+RC'-P'A-Q'B-R'C)\delta x\delta y\delta z$$

となる。

この公式は，付加的な仮定，たとえば関数 A, B, C, A′, B′, C′ が Lipschitz のそれに類似な条件を満足するという仮定を付加するのでなければ，前と同様な操作によっては証明され得ないと思われる。この問題を研究し，実際外積の微分可能性からその因数の微分可能性が出るかどうかをみるのは有意義なことであろう。

一つの外微分形式はいかなる条件のもとで微分可能であるかを知る問題は，少なくも n 変数で $n-1$ 次の形式に対しては C. de la Vallée-Poussin[1] の集

(1) Intégrales de Lebesque, fonctions d'ensemble, classes de Baire; Paris Gauthier-Villars, 1916 と題する書物参照。

合の加法関数の理論に関係がある。たとえば，形式 $\Omega = \mathrm{P}[\delta y \delta z] + \mathrm{Q}[\delta z \delta x] + \mathrm{R}[\delta x \delta y]$ は，もし座標平面に平行な平面で作られた立方体の有限個を限る曲面にそっての積分 $\iint \Omega$ の和が，これら立方体の体積の和が0に近づくときまた0に近づけば，微分可能である。微分の表現

$$\Omega' = \mathrm{H}[\delta x \delta y \delta z]$$

中にはいってくる関数Hは，もちろん一般には連続でない。

以下においてはつねに，施される演算の妥当性を仮定する。

III　完全微分外形式

76. さて，ここに重要な定理がある。すなわち

任意の外微分形式 Ω の微分の微分は恒等的に0である。

実際 Ω 中に任意の項をとって，これを

$$a[\delta x_1 \ \delta x_2 \ \cdots \ \delta x_p]$$

としよう。Ω' におけるその対応項は

$$[\delta a \ \delta x_1 \ \delta x_2 \ \cdots \ \delta x_p]$$

である。

もし a が $x_1, \cdots, x_p$ にのみ関係するなら，上の項は0となり，したがってその微分もまた0である。もしこれに反して a が $x_1, \cdots, x_p$ に無関係であれば，a が x_{p+1} に等しくなるような変数変換を行なうことができる。そうすれば

$$[\delta x_{p+1} \ \delta x_1 \ \delta x_2 \ \cdots \ \delta x_p]$$

という項の微分は0である。なぜならこの項の係数は1であって，1の微分は外微分の作成に何も与えないからである。

この定理は逆を許容する。すなわち

もし一つの微分形式 Ω の微分が0であれば，形式 Ω は Ω のそれより次数が一つ少ない形式 Π の微分とみなし得られる。

この定理を証明するためにわれわれは，つぎの補助定理を利用しよう。なお

この補助定理はさらに先へいって有用となる。すなわち，

一つの形式 Ω の微分が 0 であり，もしこの形式が微分 δx_n を含んでおらなければ，Ω の係数は全部 x_n に無関係である。

実際 Ω 中に

$$A[\delta x_1\ \delta x_2\ \cdots\ \delta x_p]$$

の形の項をとろう。これは微分によって

$$[\delta A\ \delta x_1\ \delta x_2\ \cdots\ \delta x_p]$$

という項を与えるであろう。これから展開によって種々の項を得るが，その一つは

$$\frac{\partial A}{\partial x_n}[\delta x_n\ \delta x_1\ \delta x_2\ \cdots\ \delta x_p]$$

である。Ω の項はいずれも δx_n を含んでいないのであるから，この項は明らかに他のいかなる項とも消し合わない。$\Omega'=0$ であるからわれわれは必然的に

$$\frac{\partial A}{\partial x_n}=0$$

を得る。

こうして補助定理は証明されたから，われわれの定理にもどろう。$x_n=x_n^0$，$\delta x_n=0$ とおいて Ω から得られる形式を Ω_0 とよぼう。もし Ω の微分が 0 であれば，Ω_0 の微分も明らかに 0 である。さて定理は，$n-1$ 個の変数に対しては証明されたと仮定しよう。そうすれば変数 x_1，$\cdots$，x_{n-1} を用いて作られ，Ω_0 がその微分となる一つの形式 Π_0 を見いだすことができる。すなわち

$$\Pi_0'=\Omega_0$$

さて与えられた形式 Ω と未知の形式 Π とにおいて，δx_n を含まぬ項とこれを含む項とを分けよう。われわれは

$$\Omega=\Omega_1+[\delta x_n\Omega_2],\qquad \Pi=\Pi_1+[\delta x_n\Pi_2]$$

と書くことができる。もし Π' 中で δx_n を含む項を計算すれば

$$\Pi'=\left[\delta x_n\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_n}\right]-[\delta x_n\Pi_2']+\cdots$$

を得る。形式 Π_2 を任意に選んで，Π_1 を条件

1°　　　$x_n=x_n^0$ に対しては Π_1 は Π_0 になる，

2°　　　$\dfrac{\partial\Pi_1}{\partial x_n}=\Pi_2'+\Omega_2$　である

によって定めよう。このような Π_1 は求積によって得られる。

上にのべたように選ばれた形式 Π はつぎの性質をもっている。すなわち

1°　同類項を整理すれば，差 $\Pi'-\Omega$ はもはや δx_n を含まない。

2°　その係数において $x_n=x_n^0$ とすれば，これは0となる。

さて，この形式の微分は0であり，したがって補助定理によれば，その係数はすべて x_n に無関係な値をもっていることに注意しよう。したがってこの形式は恒等的に0であり，したがって定理は証明された。

しかもこの証明は，形式 Π において δx_n を含む項を任意に選び得ること，δx_n を含まぬがしかし δx_{n-1} を含む項の $x_n=x_n^0$ に対する値を任意に選び得ること，δx_n も δx_{n-1} も含まぬがしかし δx_{n-2} を含む項の $x_n=x_n^0$, $x_{n-1}=x_{n-1}^0$ に対する値を任意に選び得ること，等々を示している。

なおもし問題の解が一つ存在すれば，他のすべての解はこれから（Ω のそれより二つだけ次数の低い）任意の形式の微分を Π に加えて得られることは明らかである。

77. もし Ω が一つの一次形式であれば，その外微分が0であるという仮定からは，上の定理によって Ω は一つの完全微分であるという，すでに指摘した結果が得られる。もし Ω が三変数の二次形式であれば，すなわち

$$\Omega=\mathrm{P}[\delta y\delta z]+\mathrm{Q}[\delta z\delta x]+\mathrm{R}[\delta x\delta y]$$

であれば，条件

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}=0$$

は，Ω が一つの一次形式の微分とみなされ得るために，すなわち

$$\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}=P,$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}=Q,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=R$$

を満足する三つの関数 A, B, C を見いだし得るために，必要にしてかつ十分である。

注意。もし形式 Ω の係数がある領域内で一価であれば，$\Omega'=0$ という条件は，この領域内で一価であって，Ω がその外微分となるような形式 Π の存在を保証するのに必ずしも十分でない。たとえば一つの球面上の点からなる（閉じていて境界のない）二次元の領域を考えよう。そして Ω をこの領域内で一価な（そして連続な第一次偏微分を許容する係数をもった）二次の形式としよう。微分 Ω' は明らかに 0 である。しかしながら，もしその微分 ω' が Ω に等しい一次形式 ω が存在すれば，$\int\omega$ を球の同一の大円に沿って二つの異なる向きに二回積分して

$$\iint_{\Sigma}\Omega=0$$

を得る。ここに積分は球の全表面にわたるものである。以上の方程式は，Ω が球面全体で一価な形式 ω の完全微分とみなし得られるための，一つの付加的な条件を与えるものである。

第 8 章

外微分形式の特性系，積分不変式の形成

I　外微分形式の特性系

78. 前章の結果によれば，与えられた外微分形式 Ω の特性 Pfaff 系を容易に作ることができる。

そのために，もし Ω が微分方程式系

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

に対して不変であれば，Ω は $n-1$ 個の独立な第一積分 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ とその微分とを用いて表わし得られることに注意しよう。したがってその微分 Ω' もまたこれらの第一積分とその微分とを用いて表わし得られる。したがって二つの外形式 Ω と Ω' に随伴する一次（全微分）方程式系は，方程式

$$(2)\qquad dy_1=0,\ \cdots,\ dy_{n-1}=0,$$

したがって方程式 (1) から導かれる結果である。

言いかえれば，微分方程式系 (1) が $\Omega(\delta)$ を不変形式として許容するためには，Ω と Ω' の随伴系が，変数 $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ を $X_1, \cdots. X_n$ でおきかえたときに満足されることが必要である。

逆にこの条件が満足されていると仮定しよう。$\Omega(d)$ の随伴系は，方程式 (1) を考慮に入れれば満足されるのであるから，それと同等な方程式 (2) を考慮に入れても満足される。したがって量 dx_i の外形式と考えられた $\Omega(d)$ は，$dy_1, \cdots, dy_{n-1}$ のみを用いて表わし得られる。ここに係数は x の関数であって，$y_1, \cdots, y_{n-1}$ と（もし $X_n\neq 0$ なら）x_n を用いて表わされているとつねに仮定する

ことができる。したがってわれわれは

$$\Omega=\sum \mathrm{A}_{i_1\cdots i_p}[dy_{i_1}\cdots dy_{i_p}]$$

を得る。

Ω' を作れば，$[dx_n \ dy_{i_1}\cdots dy_{i_p}]$ に関する唯一の項は係数 $\dfrac{\partial \mathrm{A}_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_n}$ をもっていることが見いだされる。さて仮定によれば，Ω' は dy_i という量のみで表わされるはずである。したがってわれわれは

$$\frac{\partial \mathrm{A}_{i_1\cdots i_p}}{\partial x_n}=0$$

を得る。したがって Ω は与えられた微分方程式系の第一積分とその微分とで表わされる。したがってこれは一つの不変形式である。

これから直ちに，Ω の特性系の方程式は Ω の随伴系の方程式に Ω' の随伴系の方程式を結びつけたものになることがわかる。

79.　二，三の重要な特別な場合を調べよう。

Ω は完全微分である，すなわち $\Omega'=0$ であると仮定しよう。この場合には微分形式 Ω の特性系は形式 Ω の随伴系と一致する。

応用として，相対（完全）積分不変式 $\int\Omega$ の特性系を求めよう。この相対不変式は絶対不変式 $\int\Omega'$ に直される。さて Ω' は一つの完全微分である。したがって相対積分不変式 $\int\Omega$ の特性系はその導形式 Ω' の随伴系と一致する。

これは，力学の一次積分不変式

$$\int\omega_\delta=\int\sum p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

に対して起こることである。この場合には

$$\omega_\delta'=\sum[\delta p_i\delta q_i]-[\delta\mathrm{H}\delta t]$$

である。形式 ω' の随伴系は

$$\frac{\partial\omega'}{\partial(\delta q_i)}=0,\quad \frac{\partial\omega'}{\partial(\delta p_i)}=0,\quad \frac{\partial\omega'}{\partial(\delta t)}=0,$$

すなわち δ の代わりに記号 d を用いれば

$$-dp_i-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}dt=0,$$

$$dq_i-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}dt=0,$$

$$d\mathrm{H}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}dt=0$$

である。これはわれわれが第一章（第11項）で行なった計算そのものである。

ここに微分形式 ω' は二次形式である。したがってわれわれは，前もって随伴系の独立な方程式の数が偶数であることを知っている。これは $2n+1$ 個の特性系の方程式が $2n$ 個のそれに帰着することを説明するものである。同様に，不変形式

$$\xi[\delta y\delta z]+\eta[\delta z\delta x]+\zeta[\delta x\delta y]+(\eta w-\zeta v)[\delta x\delta t]+(\zeta u-\xi w)[\delta y\delta t]$$
$$+(\xi v-\eta u)[\delta z\delta t]$$

に関連して流体力学に起こる事情が説明される。

この場合には $n=4$ である。したがって特性系は4または2または0個の独立な方程式を含んでいる。さてこれは4ではあり得ない。なぜならこの形式は分子の軌道の微分方程式に対して不変であるからである。したがってこれは2または0である。もし，$\xi=\eta=\zeta=0$，すなわちもし運動が非回転的であればこれは0である。そうでない場合には，軌道がこの形式の唯一の特性曲線ではないことを先験的に予見することができる。

80. 最後に重要な場合は，形式 Ω が次数 $n-1$ の場合である。もし Ω が一つの微分方程式系に対して不変であれば，この微分方程式系は必然的に唯一つである。なぜなら Ω の随伴 Pfaff 系は $n-1$ 個の独立な方程式で作られているからである。Ω' の随伴系が $n-1$ 個以上の独立な方程式を含まぬためには，明らかに Ω' が0であることが必要である。したがって，$n-1$ 次の形式 Ω が一つの微分方程式系に対して不変であるためには，その微分が恒等的に0になることが必要にしてかつ十分である。

一つの簡単な例が，連続媒質の運動学の積分不変式

$$\iiint \rho(\delta x-u\delta t)(\delta y-v\delta t)(\delta z-w\delta t)$$

によって与えられる。

ここに形式 Ω は

$$\Omega=\rho[\delta x\delta y\delta z]-\rho u[\delta y\delta z\delta t]-\rho v[\delta z\delta x\delta t]-\rho w[\delta x\delta y\delta t]$$

である。条件 $\Omega'=0$ は

$$\Omega'\equiv\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right][\delta t\delta x\delta y\delta z]=0$$

を与える。これは連続性の条件，または物質保存の法則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

である。

この物質保存の法則は，基本物質量を定義する形式の微分 Ω' が 0 であるという簡単な条件で表わされるのがみられる。

81. 物理学における保存法則は，しばしば類似な条件によって表わされる。力の場 X, Y, Z に対する力束の保存則は，この力の場の発散が 0，すなわち

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

で表わされる。さてこれは単に，基本力束

$$\Omega=X[\delta y\delta z]+Y[\delta z\delta x]+Z[\delta x\delta y]$$

の微分が 0 であることを示している。

すべての（静）磁場はこの条件を満足している。外形式

$$\Omega=H_x[\delta y\delta z]+H_y[\delta z\delta x]+H_z[\delta x\delta y]+E_x[\delta x\delta t]+E_y[\delta y\delta t]+E_z[\delta z\delta t]$$

を用いて定義される電磁場は，また Ω' が 0 という条件を満足している。われわれは

$$\Omega'=\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}\right)[\delta x\delta y\delta z]+\left(\frac{\partial H_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)[\delta y\delta z\delta t]$$

$$+\left(\frac{\partial \mathrm{H}_y}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x}\right)[\delta z\delta x\delta t]+\left(\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y}\right)[\delta x\delta y\delta t]$$

を得る。

Ω' の四つの係数を 0 とおいてわれわれは，ベクトル記号を用いれば

$$\operatorname{div}\mathrm{H}=0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}+\operatorname{curl}\mathrm{E}=0$$

と書かれ得る，四つの古典的な方程式を得る。

すでにしばしば考えた流体力学の形式

$$\Omega=\xi[\delta y\delta z]+\eta[\delta z\delta x]+\zeta[\delta x\delta y]+(\eta w-\zeta v)[\delta x\delta t]$$
$$+(\zeta u-\xi w)[\delta y\delta t]+(\xi v-\eta u)[\delta z\delta t]$$

はまた，Ω が「運動量・エネルギー」一次形式の微分であって，その微分が 0 であるから，ベクトル (ξ, η, ζ)，および ($\eta w-\zeta v$, $\zeta u-\xi w$, $\xi v-\eta u$) は，磁場および電場と同じ条件を満足している。これら二つのベクトルの一方は，磁気力の役割を演ずる渦動であり，他は電気力の役割を演ずる渦動と速度のベクトル積である。

電磁場（またはむしろそれを表わす形式 Ω）は，いかなる微分方程式系に対しても不変であり得ないことは注意を要する。なぜなら [Ω^2] は一般に 0 でないからである。例外は磁場が電場に垂直な場合にのみ起こる。この場合特性系は，方程式

$$\mathrm{H}_z dy-\mathrm{H}_y dz+\mathrm{E}_x dt=0,$$
$$\mathrm{H}_x dz-\mathrm{H}_z dx+\mathrm{E}_y dt=0,$$
$$\mathrm{H}_y dx-\mathrm{H}_x dy+\mathrm{E}_z dt=0,$$
$$-\mathrm{E}_x dx-\mathrm{E}_y dy-\mathrm{E}_z dz=0$$

で定義される。そしてこれは三つの方程式に帰着する。Ω を不変形式として許容する微分方程式系の一つは

$$\frac{dx}{\mathrm{H}_x}=\frac{dy}{\mathrm{H}_y}=\frac{dz}{\mathrm{H}_z}=\frac{dt}{0}$$

である。これは各瞬間に磁場の力線を定義する。他の一つは

$$\frac{dx}{\mathrm{E}_y\mathrm{H}_z-\mathrm{E}_z\mathrm{H}_y}=\frac{dy}{\mathrm{E}_z\mathrm{H}_x-\mathrm{E}_x\mathrm{H}_z}=\frac{dz}{\mathrm{E}_x\mathrm{H}_y-\mathrm{E}_y\mathrm{H}_x}=\frac{dt}{\mathrm{H}_x{}^2+\mathrm{H}_y{}^2+\mathrm{H}_z{}^2}$$

である。

もし磁場が0であれば，特性集合体は方程式

$$dt=0,\quad \mathrm{E}_x dx+\mathrm{E}_y dy+\mathrm{E}_z dz=0$$

で定義される。これは瞬間 t に考えられた等ポテンシャル面である。

II 積分不変式の形成

82. 二つの不変外形式の外積がまた一つの不変形式であることは明らかである。

これによれば，一つの不変な外形式 Ω を知れば，これから他の不変形式の一列，すなわち Ω' と，Ω と Ω' の外積を作って得られるすべての形式の一系を知ることができる。

まず Ω は偶数次の絶対不変形式であると考えよう。そうすれば絶対不変形式の二つの列

$$[\Omega^p],\quad [\Omega^{p-1}\Omega'] \qquad (p=1,2,\cdots)$$

を得る。第一列に属する一つの形式の微分は，第二の列に属する形式である。第二の列に属する形式の微分は0である。

つぎに Ω を奇数次の絶対不変形式であると考えよう。われわれは二つの列

$$[\Omega'^p],\quad [\Omega\Omega'^{p-1}] \qquad (p=1,2,\cdots)$$

を得る。第一の列に属する形式の微分は0である。第二の列に属する形式の微分は，第一の列に属する一つの形式である。

今度は一つの相対積分不変式 $\int\Omega$ があるとして，まず Ω は偶数次であると仮定しよう。われわれはこれから唯一つの新しい不変式，絶対不変式 $\int\Omega'$ しか導き得ない。

これに反してもし Ω が奇数次であれば，われわれは相対積分不変式 $\int\Omega\Omega'^{p-1}$ の一列と絶対積分不変式 $\int\Omega'^{p}$ の一列とを得る。なお相対不変式 $\int\Omega\Omega'^{p-1}$ は微分によって絶対不変式 $\int\Omega'^{p}$ に直される。

たとえば力学における相対不変式

$$\int\omega=\int\sum_{i=1}^{i=n}p_i\delta q_i-\mathrm{H}\delta t$$

においてそうである。これから導かれる相対積分不変式は

$$\int\omega\omega'^{p-1}\qquad(p=1,\cdots,n)$$

である。絶対積分不変式は

$$\int\omega'^{p}\qquad(p=1,\cdots,n)$$

である。

したがって，$2n$ より小，または $2n$ に等しい，任意の与えられた次数の（相対または絶対）不変式が存在する。

83. しかしながら，いまわれわれがその存在を示した新しい不変式が，つねに与えられた不変式から（積分なしに）導かれ得る唯一の不変式であると思ってはならない。たとえば

$$\Omega=[\omega_1\omega_2\omega_3]+[\omega_4\omega_5\omega_6]$$

の形に直し得る不変形式 Ω を知っていると考えよう。ただしここに $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_6$ は六つの独立な（Pfaff の）一次形式である。六つの不定変数 $\xi_1,\ \cdots,\ \xi_6$ を導入して，補助の二次形式

$$\Pi=\xi_1\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_1}+\xi_2\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_2}+\cdots+\xi_6\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_6}$$

を考えよう。

もし ξ を ω と共変な量とみなせば，形式 Π は Ω と共変なことは明らかである。この形式が階数 2 であることを書き表わそう。われわれは条件

$$\xi_i \xi_\alpha = 0, \qquad (i=1, 2, 3;\ \alpha=4, 5, 6)$$

を得る。

この場合

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0,$$

または

$$\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = 0$$

で与えられる二つの可能な解が存在する。

これから，三つの共変 Pfaff 方程式の二つの系，すなわち

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,$$

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0$$

の存在が導かれる。

したがってさらに形式 $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ と形式 $[\omega_4\omega_5\omega_6]$ はまた共変である。第一の形式は Ω において第二の共変系の方程式を考えに入れて得られる。第二の形式は第一の共変系の方程式を考えに入れて得られる。

さて Ω は，Ω がその不変形式であるような方程式系の第一積分とその微分とで表わし得られると仮定しよう。二つの共変 Pfaff 系の形成は標準形に対しても同様に行なうことができ，そのおのおのは第一積分とその微分しか含んでいない。二つの形式 $[\omega_1\omega_2\omega_3]$ および $[\omega_4\omega_5\omega_6]$ に対しても同様である。したがってこれらは不変形式である。

したがって積分不変式 $\int\Omega$ の存在から，積分不変式 $\int\omega_1\omega_2\omega_3$ および $\int\omega_4\omega_5\omega_6$ のおのおのの存在が導かれる。

同様な推論によって，$p>2$ 次の不変形式であって，それらの項のなかにはいってくる hp 個の因数が一次独立であるような h 個の単項式の和に直し得るものの存在から，これら単項式のおのおのが不変形式であるという性質が導かれる。

この定理はもし $p=2$ であれば真でない。

84. ある種の場合には，一つの不変形式の存在から，一つの不変方程式の存在が導かれる。たとえば形式

$$\Omega=[\omega_1\omega_2\omega_5]+[\omega_3\omega_4\omega_5]$$

を考えよう。ただしここに $\omega_1, \cdots, \omega_5$ は五つの独立な Pfaff 形式を示すものとする。Ωを0にする，これらの形式の間の唯一の関係式は，明らかに

$$\omega_5=0$$

である。したがってこの方程式は不変である。これはΩが不変形式であるような微分方程式の第一積分を用いて表わされる。

一般に，もしΩが一つの不変形式であり，Ωの随伴系がその特性系と一致しなければ，この随伴系は一つの不変 Pfaff 系である。

これらの考察を種々に変えることも可能である。

84′. さらに同一の随伴系をもつ二つの二次不変形式 Ω_1 と Ω_2 の場合をとろう。$2s$ をこれらに共通な階数とする。形式 $\Omega_1-\lambda\Omega_2$ の階数が $2s$ より小であることを表わす，λ に関して s 次の方程式

$$[(\Omega_1-\lambda\Omega_2)^s]=0$$

は，明らかに一つの不変な意味をもっている。したがってλに関する方程式の根は，Ω_1 および Ω_2 を第一積分として許容する微分方程式の第一積分である。一般の場合には，Ω_1 と Ω_2 は

$$\Omega_1=\lambda_1[\omega_1\omega_2]+\lambda_2[\omega_3\omega_4]+\cdots+\lambda_s[\omega_{2s-1}\omega_{2s}],$$

$$\Omega_2=[\omega_1\omega_2]+[\omega_3\omega_4]+\cdots+[\omega_{2s-1}\omega_{2s}]$$

という形に直し得ることが証明される。

単項形式 $[\omega_1\omega_2]$, $[\omega_3\omega_4]$, $\cdots$, $[\omega_{2s-1}\omega_{2s}]$ のおのおのは不変である。

第 9 章

一つの無限小変換を許容する微分方程式系

I　無限小変換の概念

85. n 変数の変換は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関して解くことのできる方程式系

(1)
$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

で定義される。幾何学的に，もし $x_1, \cdots, x_n$ を n 次元空間中における一点M の座標とみなせば，変換 (1) は，一定の法則にしたがって，空間の任意の一点 M を他の点 M′ に移す。変換は幾何学においてしばしば用いられる。(相似伸縮，相似，反転，またはもっと簡単な回転，併進など。)

変換 (1) は，その右辺がそれぞれ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ になるとき恒等変換と呼ばれる。この場合すべての点はそれ自身に変換される。

一つの微分方程式系

(2)
$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

が与えられた場合，変換 (1) を (2) の任意の積分曲線の各点に施せば，またすべて他の一つの新しい積分曲線に属する点が得られるならば，この微分方程式系は変換 (1) を許容すると言われる。

一つの媒介変数 a に関係し，この媒介変数のある数値 a_0 に対しては恒等変換になるような変換を考えよう。そして $a-a_0=\varepsilon$ とおき，(1) の右辺は ε のベキによって

$$x_i' = x_i + \varepsilon\xi_i(x_1, \cdots, x_n) + \cdots$$

と展開されると仮定しよう。

ε に関して一次の項のみに注意を向けるならば，いわゆる無限小変換が得られる。したがって一つの無限小変換は，$x_1, \cdots, x_n$ の n 個の関数 ξ_i によって完全に定義される。これらすべての関数に同一の定数因数をかければ，前と同一の無限小変換が得られる。関数 ξ_i は，この無限小変換による変数 x_i の増分を表わすと言われる。(実際の増分は $\varepsilon\xi_i$ であるが，係数 ε は第二義的な役割しか演じない。)

一つの関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が与えられた場合，無限小変換がこの関数に与える増分は，因数 ε を別にすれば

$$f(x_1', \cdots, x_n')-f(x_1, \cdots, x_n)=f(x_1+\varepsilon\xi_1, \cdots, x_n+\varepsilon\xi_n)-f(x_1, \cdots, x_n)$$

の展開の第一項である。したがってこれは

$$\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

である。われわれはこの式を記号 $\mathrm{A}f$ で表わそう。すなわち

(3) $$\mathrm{A}f=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

$\mathrm{A}f$ は，与えている**無限小変換の記号**であるということにしよう。

86. 公式 (3) は，一つの関数 f の全微分を与える公式

$$\delta f=\delta x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\delta x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\delta x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

に類似な公式である。

ただ一つの違いは，δ が不定な演算の記号であるのに反し，A は一定な演算の記号である点である。微分の記号は，$\delta x_1, \cdots, \delta x_n$ に一定の値（変数の与えられた関数）を与えるならば，無限小変換の記号になる。

記号的に A で表わされる演算は，微分を含まぬ関数ばかりでなく，微分形式に対しても施すことができる。たとえば $\mathrm{A}(dx_i)$ は，dx_i の増分の主要項（を ε で割ったもの）を表わすものとする。さて

$$dx_i'-dx_i=\varepsilon d\xi_i+\cdots$$

である。したがって

$$A(dx_i)=d\xi_i=d(Ax_i)$$

とおくことにする。

これから，演算Aは（不定な）微分演算と交換可能と考えるべきであるのがみられる。

87. 微分方程式系 (2) にもどろう。この微分方程式系は，もし任意の積分曲線の種々の点に無限小変換 (3) を施した場合に，二次の無限小を除いては，すべて新しい積分曲線上にのっている点を与えるならば，この無限小変換 (3) を許容すると言われる。

もし方程式 (2) が一つの媒介変数 a に関係する変換を許容するならば，そしてこのことがこの媒介変数の数値いかんにかかわらず成立するならば，この微分方程式系は，恒等変換を与える（もし存在するならば）値 a_0 に無限に近い値 a に対応する無限小変換を許容することは明らかである。

もし y が方程式 (2) の一つの第一積分であり，方程式 (2) が無限小変換 Af を許容するならば，$A(y)$ もまた一つの第一積分であることは明らかである。実際任意の積分曲線 (C) 上のすべての点 M において，y は同一の数値 c をもっている。M の変換された点 M′ においては，関数 y は $\varepsilon A(y)$ だけ増加する。この増加は (C) の点 M のいかんにかかわらず同一でなければならない。したがって $A(y)$ は (C) のすべての点で同一の数値をもっていなければならない。ことばをかえて言えば，$A(y)$ は一つの第一積分である。

逆にもし演算Aを任意の第一積分に施した場合に，やはり第一積分を与えるならば，微分方程式系 (2) は無限小変換 Af を許容する。実際もし

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{n-1}$$

を，$n-1$ 個の独立な第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n-1}$$

が積分曲線 (C) の種々の点でとる定数値であるとすれば，これらの積分が変換

された点 M′ でとる値は，関数

$$y_1+\varepsilon\mathrm{A}(y_1),\ y_2+\varepsilon\mathrm{A}(y_2),\ \cdots,\ y_{n-1}+\varepsilon\mathrm{A}(y_{n-1})$$

が点 M 自身でとる値である。したがってこれらは定数である。したがって点 M′ は確かに一つの積分曲線を生成する。

II　無限小変換から出発する積分不変式の形成

88. 以上の性質はわれわれに，微分方程式 (2) の許容する無限小変換 $\mathrm{A}f$ を知れば，あらゆる不変微分形式 Ω から他の一つの不変形式，すなわち $\mathrm{A}(\Omega)$ を導き得ることを示している。もし形式 Ω が外形式であれば，形式 $\mathrm{A}(\Omega)$ も外形式であり，新しく得られる形式はもとの形式と同じ次数である。

不変外形式 Ω から他の不変形式を導くことを可能ならしめる第二の演算が存在する。考えを定めるために Ω は三次のそれであると仮定し，これに対応する三次微分形式 $\Omega(\delta, \delta', \delta'')$ を考えよう。この形式において，不定な微分記号 δ を無限小変換の記号でおきかえよう。そうすればわれわれは，二系の微分 δ', δ'' をもった交代双一次形式 $\Omega(\mathrm{A}, \delta', \delta'')$ を得る。そしてこれには一つの外二次形式が対応するが，われわれはこれを $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ で示そう。この新しい形式は，最初の形式から変数の撰択とは無関係な意味をもった演算によって導かれる。もし Ω が方程式 (2) の第一積分 y_i とその微分とで表わされるならば，表現 $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ はやはり y_i と δy_i とで表わされる。したがって上に定義した演算は，あらゆる不変形式から次数の一つ少ない他の不変形式を導くことを可能ならしめる。

なお

$$\Omega(\mathrm{A}, \delta)=\xi_1\frac{\partial\Omega}{\partial(\delta x_1)}+\xi_2\frac{\partial\Omega}{\partial(\delta x_2)}+\cdots+\xi_n\frac{\partial\Omega}{\partial(\delta x_n)} \tag{4}$$

が成立する。

89. 上に定義した二つの新しい演算は互いに独立ではない。考えを定めるた

めに，Ω は二次であると仮定し，その外微分 Ω' を定義する公式をとろう。そうすれば，三つの記号 $\delta,\ \delta',\ \delta''$ は互いに交換可能であるというだけの条件のもとに

$$\Omega'(\delta,\delta',\delta'')=\delta\Omega(\delta',\delta'')-\delta'\Omega(\delta,\delta'')+\delta''\Omega(\delta,\delta')$$

を得る（第71項)。ここで記号 δ を無限小変換 Af の記号でおきかえよう。そうすればわれわれは

$$\Omega'(\mathrm{A},\delta',\delta'')=\mathrm{A}(\Omega(\delta',\delta''))-\delta'\Omega(\mathrm{A},\delta'')+\delta''\Omega(\mathrm{A},\delta'),$$

すなわち外形式に移って

$$\Omega'(\mathrm{A},\delta)=\mathrm{A}(\Omega(\delta))-[\Omega(\mathrm{A},\delta)]',$$

または

$$(5)\qquad \mathrm{A}(\Omega(\delta))=\Omega'(\mathrm{A},\delta)+[\Omega(\mathrm{A},\delta)]'$$

を得る。

この基本的な公式は，第一の演算を Ω に施した結果を左辺に含んでいる。右辺の二つの項について言えば，第一項はまず Ω に外微分の演算を施し，つぎに Af に対応する第二の演算を施して得られる。第二項は，Ω から同一の演算を逆の順序に施して得られる。

結局，方程式 (2) の許容する一つの無限小変換 Af を知れば，一つの不変形式 $\Omega(\delta)$ から他の新しい不変形式 $\Omega(\mathrm{A},\delta)$ を導くことを可能ならしめる，公式 (4) で定義される一つの本質的に新しい演算をわれわれは得る。

とくに，y が一つの第一積分であれば，第一積分 A(y) がつぎのようにして得られるのに注意することができる。まず微分によって $\omega(\delta)=\delta y$ が得られ，つぎに演算 (4) をあてはめて

$$\omega(\mathrm{A})=\mathrm{A}(y)$$

が得られる。

III 例

90. 運動しつつある，密度が ρ で速度の成分が $u,\ v,\ w$ である連続的な媒質

を考えよう。一つの分子の運動の微分方程式

$$(6)\qquad \frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w$$

は，すでにみたように（第37項），積分不変式

$$\iiint\rho(\delta x\delta y\delta z-u\delta y\delta z\delta t-v\delta z\delta x\delta t-w\delta x\delta y\delta t)$$

を許容し，これには不変形式

$$\Omega=\rho[\delta x\delta y\delta z]-\rho u[\delta y\delta z\delta t]-\rho v[\delta z\delta x\delta t]-\rho w[\delta x\delta y\delta t]$$

が対応する。

運動は定常である，すなわち ρ, u, v, w は t に無関係であると仮定しよう。方程式 (6) は時間を明示的には含まないから，すなわち t を $t+\varepsilon$ にかえても不変であるから，無限小変換

$$\mathrm{A}f=\frac{\partial f}{\partial t}$$

を許容する。

したがってこれらの方程式は不変形式

$$\Omega(\mathrm{A},\ \delta)=\frac{\partial\Omega}{\partial(\delta t)}=-\rho u[\delta y\delta z]-\rho v[\delta z\delta x]-\rho w[\delta x\delta y]$$

を許容する。

この形式が不変であるという性質は，物理的に明らかである。実際一つの軌道の管を考えて，この管を二つの任意の曲面できろう。これらの曲面は管の内部に二つの面積 S および S′ を決定する。管の側面と二つの曲面 S および S′ の間にある体積を満たす物質の量はつねに同一である。したがってこの体積を限る曲面を通して流れる物質の代数的な流量は 0 である。さて側面を過ぎる流量は 0 である。したがってわれわれは

$$\iint_{\mathrm{S}}\rho(u\delta y\delta z+v\delta z\delta x+w\delta x\delta y)=\iint_{\mathrm{S}'}\rho(u\delta y\delta z+v\delta z\delta x+w\delta x\delta y)$$

を得る。

不変形式 $\Omega(\mathrm{A},\delta)$ は一つの完全微分であることに注意しよう。事実その微分は，もしそれが 0 でなければ，Ω と微分を含まぬ因数でしか異なり得ない。さてこの微分は δt を含まない。したがって

$$[\Omega(\mathrm{A}, \delta)]' = 0$$

である。

したがって $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ の特性系は，その随伴系と一致する。これは方程式

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

で与えられる。これは分子の軌道を定義するが，しかしながらこれらの軌道が時間と共にいかに描かれるかというその仕方とは独立に軌道を定義する。

公式 (5) はまた形式 $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ の微分が 0 であるという性質を示している。事実ここに形式 Ω' は恒等的に 0 である。他方 Ω は t を明示的には含んでいないのであるから，t を $t+\varepsilon$ に変えても変わらない。したがって $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ は 0 である。この注意はつぎの例にもあてはまる。

91. こんどは，一つのポテンシャルから導かれる力の作用を受けて運動しつつある一つの完全流体を考えよう。われわれはすでに（第22項），一つの絶対不変形式

$$\omega' = \xi[\delta y\delta z] + \eta[\delta z\delta x] + \zeta[\delta x\delta y] + (\eta w - \zeta v)[\delta x\delta t] + (\zeta u - \xi w)[\delta y\delta t] + (\xi v - \eta u)[\delta z\delta t]$$

の存在をみた。これは一つの一次形式

$$\omega = u\delta x + v\delta y + w\delta z - \mathrm{E}\delta t$$

を外微分して得られる。ここに単位質量ごとのエネルギーである E は

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - \mathrm{U} + \int \frac{dp}{\rho}$$

という表現をもっている。

運動は定常である，すなわち u, v, w, p, ρ は t に無関係であると仮定しよう。そうすれば，ここでもまた一つの新しい不変形式

$$\omega'(\mathrm{A}, \delta) = \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta t)} = (v\zeta - w\eta)\delta x + (w\xi - u\zeta)\delta y + (u\eta - v\xi)\delta z$$

$$= \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

を得る。

他方，式

$$\omega'=[\delta u\delta x]+[\delta v\delta y]+[\delta w\delta z]-[\delta \mathrm{E}\delta t]$$

から出発してわれわれは

$$\omega'(\mathrm{A},\,\delta)=\delta\mathrm{E}$$

を見いだす。

したがってＥは運動方程式の一つの第一積分である。こうしてわれわれは，定常運動をしている完全流体中においては，量

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\mathrm{U}+\int\frac{dp}{\rho}$$

は各流線にそって一定であるという，Bernoulli の定理をふたたび見いだすわけである。

しかしながら $\delta\mathrm{E}$ は，単に流体分子の運動の微分方程式に対して不変なばかりではない。これはまた ω' を不変形式として許容する渦動線の微分方程式に対しても不変である。したがって量Ｅは，各流線にそってのみでなく，各渦動線にそっても不変である。

もし運動が非回転的であれば，最初に書いたような形式 $\omega'(\mathrm{A},\,\delta)$ は明らかに恒等的に０である。

量

$$\delta\mathrm{E}=\begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ u & v & w\\ \xi & \eta & \zeta\end{vmatrix}$$

によれば，各点Ｍにおけるエネルギーの（空間的）変化を，この点を原点にもち，速度ベクトル $(u,\,v,\,w)$ と渦動ベクトル $(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ のベクトル積であるベクトル MH を用いて表わすことができる。与えられた方向にそってのエネルギーの微分は，ベクトル MH のこの方向への射影に等しくなる。

92. 非常に一般な他のもう一つの応用は，与えられた束縛と力が時間に無関

係な場合における力学の問題に関するものである。運動の方程式が許容する無限小変換 $Af=\frac{\partial f}{\partial t}$ によれば，力学の基本積分不変式

$$\iint\omega'=\iint\sum\delta p_i\delta q_i-\delta H\delta t$$

から，δt に関する偏微分によって得られる新しい積分不変式

$$\int\delta H$$

を導くことができる。こうしてわれわれは，関数 H が時間に無関係であるというだけの条件のもとで，拡張されたエネルギーの積分

$$H=h$$

を得る。

さらに一般に，関数 H は変数 p_i および q_i のうちの一つ，たとえば q_n を含まぬと仮定しよう。そうすれば運動の方程式は無限小変換 $\frac{\partial f}{\partial q_n}$ を許容する。これから不変一次形式

$$\frac{\partial\omega'}{\partial(\delta q_n)}=-\delta p_n$$

が導かれる。したがってもし関数 H が標準変数の一つを含まなければ，その共役変数は運動の方程式の一つの第一積分である。

Ⅳ　n 体問題への応用

93. それらの質量に比例し，それらの距離の与えられた累乗に逆比例する力で互いに引き合っている n 個の質点を考えよう。ここには一つの力の関数

$$U=f\sum_{i,j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}{}^p}$$

が存在する。ただしここに p は与えられており（天体力学の場合には 1 に等しい），量 r_{ij} は質量が m_i と m_j である二点 M_i と M_j の間の距離を示すものである。

この質点系の運動方程式は自明ないくつかの無限小変換を許容する。まず時間は明示的にはこれらの方程式のなかにはいってこない。さらに，空間におけるこの質点の集合を移動して，また，(すべての点に対して同一である)補助的な一様直進運動を n 個の点のおのおのに与えることによって，この問題のあらゆる解から他の一つの解を導き出すことができる。これから直に無限小変換

$$\mathrm{A}_0 f=\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\mathrm{A}_1 f=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i},\quad \mathrm{A}_2 f=\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i},\quad \mathrm{A}_3 f=\sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i},$$

$$\mathrm{A}_4 f=\sum\left(y_i\frac{\partial f}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial f}{\partial y_i}+y_i'\frac{\partial f}{\partial z_i'}-z_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right),\quad \mathrm{A}_5 f=\cdots,\quad \mathrm{A}_6 f=\cdots,$$

$$\mathrm{A}_7 f=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}+t\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),\ \mathrm{A}_8 f=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}+t\frac{\partial f}{\partial y_i}\right),\ \mathrm{A}_9 f=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial z_i'}+t\frac{\partial f}{\partial z_i}\right)$$

の存在が導かれる。

変換 $\mathrm{A}_1 f$ は $\mathrm{O}x$ に平行な移動に対応する。変換 $\mathrm{A}_4 f$ は $\mathrm{O}x$ のまわりの回転に対応する。変換 $\mathrm{A}_7 f$ は $\mathrm{O}x$ に平行な定速度を付加した運動に対応する。

終わりに，斉次性の考察に基く最後の無限小変換を示すことができる。事実方程式

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_i}$$

は，すべての座標 x_i，y_i，z_i に同一の定数因数 λ をかけても，t を $\lambda^{1+\frac{p}{2}}$ 倍することにすれば不変であるからである。この場合速度の成分 x_i'，y_i'，z_i' は $\lambda^{-\frac{p}{2}}$ 倍される。$\lambda=1+\varepsilon$ ととれば，新しい無限小変換

$$\mathrm{A}_{10} f=\sum\left[x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial f}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial f}{\partial z_i}-\frac{p}{2}\left(x_i'\frac{\partial f}{\partial x_i'}+y_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'}+z_i'\frac{\partial f}{\partial z_i'}\right)\right]+\left(1+\frac{p}{2}\right)t\frac{\partial f}{\partial t}$$

に達する。

U の定義自身によれば，

$$\mathrm{A}_0\mathrm{U}=\mathrm{A}_1\mathrm{U}=\cdots=\mathrm{A}_9\mathrm{U}=0,\qquad \mathrm{A}_{10}\mathrm{U}=-p\mathrm{U}$$

であることに注意しよう。

94.　二次の基本積分不変式

$$\omega' = \sum(m_i[\delta x_i'\delta x_i] + m_i[\delta y_i'\delta y_i] + m_i[\delta z_i'\delta z_i])$$
$$-[\sum m_i(x_i'\delta x_i' + y_i'\delta y_i' + z_i'\delta z_i')\delta t] + [\delta U\delta t]$$

を思い出そう。

ω_i で一次形式 $\omega'(A_i, \delta)$ を表わそう。11個の不変一次形式 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_{10}$ が存在する。公式 (5) によれば，最初の10個の形式が完全微分であることが先験的に容易にみられる。なぜなら ω' は最初の10個の無限小変換のいずれによっても変わらないからである。ω_{10} に関しては公式 (5) が

$$(\omega_{10})' = A_{10}(\omega')$$

を与える。さて ω' は $1-\dfrac{p}{2}$ に等しい（上に定義した意味での）斉次次数をもっている。したがって

$$(\omega_{10})' = \left(1-\frac{p}{2}\right)\omega'$$

である。したがって ω_{10} は，$p=2$ の場合，すなわち引力が距離の平方に逆比例するときにのみ完全微分である。

11個の形式 ω_i の計算はなんらの困難もなく行なわれ，

$$\omega_0 = \sum m_i(x_i'\delta x_i' + y_i'\delta y_i' + z_i'\delta z_i') - \delta U = \delta H,$$
$$\omega_1 = -\sum m_i\delta x_i' = \delta H_1,$$
$$\omega_2 = -\sum m_i\delta y_i' = \delta H_2,$$
$$\omega_3 = -\sum m_i\delta z_i' = \delta H_3,$$
$$\omega_4 = \sum m_i(z_i\delta y_i' - y_i\delta z_i' + y_i'\delta z_i - z_i'\delta y_i) = \delta H_4,$$
$$\omega_5 = \sum m_i(x_i\delta z_i' - z_i\delta x_i' + z_i'\delta x_i - x_i'\delta z_i) = \delta H_5,$$
$$\omega_6 = \sum m_i(y_i\delta x_i' - x_i\delta y_i' + x_i'\delta y_i - y_i'\delta x_i) = \delta H_6,$$
$$\omega_7 = \sum m_i(\delta x_i - t\delta x_i' - x_i'\delta t) = \delta H_7,$$
$$\omega_8 = \sum m_i(\delta y_i - t\delta y_i' - y_i'\delta t) = \delta H_8,$$
$$\omega_9 = \sum m_i(\delta z_i - t\delta z_i' - z_i'\delta t) = \delta H_9,$$
$$\omega_{10} = -\sum m_i\left(x_i\delta x_i' + y_i\delta y_i' + z_i\delta z_i' + \frac{p}{2}x_i'\delta x_i + \frac{p}{2}y_i'\delta y_i + \frac{p}{2}z_i'\delta z_i\right)$$

$$+\left(1+\frac{p}{2}\right)t\delta\mathrm{H}+p\mathrm{H}\delta t$$

を与える。ただしここに

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}=\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-\mathrm{U},\\
&\mathrm{H}_1=-\sum m_i x_i',\\
&\mathrm{H}_2=-\sum m_i y_i',\\
&\mathrm{H}_3=-\sum m_i z_i',\\
&\mathrm{H}_4=-\sum m_i(y_i z_i'-z_i y_i'),\\
&\mathrm{H}_5=-\sum m_i(z_i x_i'-x_i z_i'),\\
&\mathrm{H}_6=-\sum m_i(x_i y_i'-y_i x_i'),\\
&\mathrm{H}_7=\sum m_i(x_i-tx_i'),\\
&\mathrm{H}_8=\sum m_i(y_i-ty_i'),\\
&\mathrm{H}_9=\sum m_i(z_i-tz_i')
\end{aligned}$$

とおいた。

ω_{10} の双一次共変式が $\left(1-\frac{p}{2}\right)\omega'$ に等しいことが容易に験証される。もし $p=2$ であれば，新しい第一積分

$$\sum m_i(x_i x_i'+y_i y_i'+z_i z_i')-2\mathrm{H}t=\mathrm{C}$$

が得られる。これを積分して

$$\sum m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)=2\mathrm{H}t^2+2\mathrm{C}t+\mathrm{C}'$$

が得られる。これは Jacobi の積分である。

第一積分 H_1, H_2, H_3、H_7、H_8, H_9 は重心の定理が与えるそれであり，第一積分 H_4, H_5, H_6 は面積定理が与えるそれである。

95. 前項においては第一積分 H_i の微分を直接求めただけであって，その積分そのものを求めたのではない。不変形式 ω_i のそれぞれに，無限小変換 $\mathrm{A}_i f$ に対応する演算を施せば，これらの第一積分それ自身が得られる。かくしてわれわれは不変関数，すなわち第一積分

$$\alpha_{ij}=\omega_i(A_j)=\omega'(A_i,\ A_j)=-\alpha_{ji}$$

を得る。われわれはこれを縦横の表によって書くが，これは明らかに交代である。計算はなんらの困難を引きおこさない。量 α_{ij} は行 i と列 j の交わりに見いだされる。文字 M は n 個の物体の質量の和を表わす。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-pH$
1	0	0	0	0	0	H_3	$-H_2$	$-M$	0	0	$-\frac{p}{2}H_1$
2	0	0	0	0	$-H_3$	0	H_1	0	$-M$	0	$-\frac{p}{2}H_2$
3	0	0	0	0	H_2	$-H_1$	0	0	0	$-M$	$-\frac{p}{2}H_3$
4	0	0	H_3	$-H_2$	0	H_6	$-H_5$	0	H_9	$-H_8$	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_4$
5	0	$-H_3$	0	H_1	$-H_6$	0	H_4	$-H_9$	0	$-H_7$	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_5$
6	0	H_2	$-H_1$	0	H_5	$-H_4$	0	H_8	$-H_7$	0	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_6$
7	0	M	0	0	0	H_9	$-H_8$	0	0	0	H_7
8	0	0	M	0	$-H_9$	0	H_7	0	0	0	H_8
9	0	0	0	M	H_8	$-H_7$	0	0	0	0	H_9
10	pH	$\frac{p}{2}H_1$	$\frac{p}{2}H_2$	$\frac{p}{2}H_3$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_4$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_5$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_6$	$-H_7$	$-H_8$	$-H_9$	0

上の表の元素で作った行列式が0であることに注意すべきである。なぜならこれは奇数次の交代行列式であるからである。したがって，変換 $A_i f$ のうちの任意の一つに関する演算を施せば，式 $\sum\lambda_i\omega_i$ が 0 となるような，すべては0でない11個の係数 λ_i が存在する。λ_{10} が0であることが容易にみられる。計算は，一つの因数を除いてのみ定義されている式 $\sum\lambda_i\omega_i$ に対して

$$\frac{\delta K}{K}+\frac{2-p}{p}\frac{\delta H}{H}$$

を与える。ただしここに

$$K=(MH_4+H_2H_9-H_3H_8)^2+(MH_5+H_3H_7-H_1H_9)^2+(MH_6+H_1H_8-H_2H_7)^2$$

とおいた。

天体力学の場合には $p=1$ である。したがって式 $\dfrac{\delta K}{K}+\dfrac{\delta H}{H}$ は HK の対数微分である。したがってこの量 HK はすべての変換 $A_i f$ によって不変である。したがって適当に座標軸を選んでその解釈を得ることは容易である。重心を原点にとれば（重心は一様な直進運動で動いているのであるからこれは可能である），H_1, H_2, H_3, H_7, H_8, H_9 が 0 になるのがみられる。したがって不変量は定数因数を別にすれば $H(H_4^2+H_5^2+H_6^2)$，すなわち，重心のまわりの運動におけるこの質点系の運動量能率の平方と，同じ運動におけるこの質点系の全エネルギーとの積に等しい。実際この量は明らかに軸の選択と単位の選択に無関係である。

V　剛体の運動学への応用

96. 三つの定直交座標軸に対して表わされた，一つの剛体の運動を考えよう。各瞬間にその運動は，一般合ベクトル (p, q, r) と原点に関する能率 (ξ, η, ζ) の系で定義されることが知られている。これら六つの量が時間の与えられた関数であると仮定しよう。剛体の一点の運動の微分方程式は

$$\frac{dx}{dt}=\xi+qz-ry=X.$$

$$\frac{dy}{dt}=\eta+rx-pz=\mathrm{Y},$$

$$\frac{dz}{dt}=\zeta+py-qx=\mathrm{Z}$$

である。

これらの方程式は，自明な一つの積分不変式を許容する。実際もし瞬間 t に，剛体の二つの無限に近い点

$$(x,\ y,\ z),\quad (x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$$

を考えれば，これら2点間の距離は時間とともに変わらない。

したがってもし同一の瞬間における点のみを考えれば，不変であるところの微分形式

$$\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2$$

を得る。これは，もし

$$\delta x,\quad \delta y,\quad \delta z$$

をそれぞれ

$$\delta x-\mathrm{X}\delta t,\quad \delta y-\mathrm{Y}\delta t,\quad \delta z-\mathrm{Z}\delta t$$

でおきかえて完全化すれば絶対不変式となる。

$$\mathrm{F}=(\delta x-\mathrm{X}\delta t)^2+(\delta y-\mathrm{Y}\delta t)^2+(\delta z-\mathrm{Z}\delta t)^2$$

をこの不変形式としよう。これに不変双一次形式

$$\mathrm{F}(\delta,\delta')=(\delta x-\mathrm{X}\delta t)(\delta' x-\mathrm{X}\delta' t)+(\delta y-\mathrm{Y}\delta t)(\delta' y-\mathrm{Y}\delta' t)$$
$$+(\delta z-\mathrm{Z}\delta t)(\delta' z-\mathrm{Z}\delta' t)$$

が対応する。

この双一次形式は交代ではなく対称である。しかしながら第88項で行なった議論は成立する。

ξ,η,ζ,p,q,r は定数であると仮定しよう。運動の微分方程式はこの場合無限小変換

$$\mathrm{A}f=\frac{\partial f}{\partial t}$$

を許容する。したがって形式 F からわれわれは，他の不変形式

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial(\delta t)}=-X(\delta x-X\delta t)-Y(\delta y-Y\delta t)-Z(\delta z-Z\delta t)$$

を導くことができる。

ここで同じ操作を繰り返すことができる。そうすればこんどは第一積分

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial(\delta t)^2}=X^2+Y^2+Z^2$$

が与えられる。

この第一積分は幾何学的には明らかである。剛体の運動は螺旋的であって，上の積分は，考えている点の速度，運動の全期間を通じてつねにそれ自身に等しい速度の平方に等しい。

VI　一つの無限小変換を許容する微分方程式

97. 以上の諸例においては，われわれは一つの積分不変式を知っていると仮定した。こんどは単に不変方程式，たとえば方程式

$$\omega(\delta)\equiv a_1\delta x_1+a_2\delta x_2+\cdots+a_n\delta x_n=0$$

だけを知っていると仮定しよう。

この方程式が不変であるということは，この方程式が与えられた微分方程式の第一積分 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ とその微分のみを含むように書かれ得るということである。いいかえると

$$\omega(\delta)\equiv\rho[b_1(y)\delta y_1+b_2(y)\delta y_2+\cdots+b_{n-1}(y)\delta y_{n-1}]$$

である。ここに b_i は $y_1, \cdots, y_{n-1}$ にのみ関係し，ρ は任意の関数である。不定な微分記号 δ を無限小変換の記号 Af でおきかえよう。そうすれば直ちに

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(A)}=\frac{b_1(y)\delta y_1+b_2(y)\delta y_2+\cdots+b_{n-1}(y)\delta y_{n-1}}{b_1(y)Ay_1+b_2(y)Ay_2+\cdots+b_{n-1}(y)Ay_{n-1}}$$

が得られ，この右辺は明らかに一つの不変一次形式である。

与えられた微分方程式系が許容する一つの無限小変換 Af と，この微分方程

式系に対して不変な一つの Pfaff 方程式 $\omega(\delta)=0$ を知れば，これから一つの一次積分不変式 $\int\frac{\omega(\delta)}{\omega(\mathrm{A})}$ が知られる。

たとえば一つの常微分方程式

$$\frac{dx}{\mathrm{X}}=\frac{dy}{\mathrm{Y}}$$

が問題であると考えよう。これはそれ自身に対して不変である。したがってもしこれが一つの無限小変換

$$\mathrm{A}f=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

を許容すれば，これはそのこと自身によって不変一次形式

$$\frac{\mathrm{X}\delta y-\mathrm{Y}\delta x}{\mathrm{X}\eta-\mathrm{Y}\xi}$$

を許容する。ここでは唯一つの第一積分しか存在しないのであるから，この形式は必然的に完全微分でなければならない。ことばを換えて言えば，この方程式の一つの積分因数を知ったことになる。これは古典的な結果である。

積分し得る微分方程式の大部分は，以上の注意に結びつけることができる。たとえば方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x),\quad \frac{dy}{dx}=f(y),\quad \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

などに対してそうである。たとえばこれらの方程式中の最後のものは，x および y に同一の定数因数 $1+\varepsilon$ を乗じても変わらない。したがってこの方程式は無限小変換

$$\mathrm{A}f=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

を許容する。したがって

$$\frac{dy-f\left(\frac{y}{x}\right)dx}{y-f\left(\frac{y}{x}\right)x}$$

という式は一つの完全微分である。この性質は，もし

$$y=ux$$

とおけば明らかとなる。なぜならこの場合上の式は

$$\frac{du}{u-f(u)}+\frac{dx}{x}$$

となるからである。

この完全微分の積分は，古典的方法と同じ計算へわれわれを導いていく。

98. 最後に，与えられた微分方程式系に対して先験的には何も知らない場合においてすら，この微分方程式系の許容する一つの無限小変換を知れば，これから一つの不変 Pfaff 系を得ることができる。実際与えられた微分方程式から導かれる結果であり，$\omega(\mathrm{A})$ が 0 となるようなすべての Pfaff の方程式 $\omega=0$ を求めてみよう。もし

$$\omega(\delta)=\lambda_1\delta x_1+\lambda_2\delta x_2+\cdots+\lambda_n\delta x_n$$

とおけば，係数 λ_i は二つの条件

$$\lambda_1\mathrm{X}_1+\lambda_2\mathrm{X}_2+\cdots+\lambda_n\mathrm{X}_n=0,$$

$$\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2+\cdots+\lambda_n\xi_n=0$$

で与えられる。

したがって求める方程式の集りは，表

$$\begin{Vmatrix} \delta x_1 & \delta x_2 & \cdots & \delta x_n \\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 & \cdots & \mathrm{X}_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{Vmatrix}$$

から3行3列をとって作られるすべての方程式を0とおいて得られる一つの Pfaff 系を作っている。

この Pfaff 系は変数の選択と独立な一つの意味をもっている。さて，もし変数として $n-1$ 個の第一積分 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ と，たとえば第 n 番目の変数 x_n とをとれば，方程式は

$$\frac{\delta y_1}{\eta_1}=\frac{\delta y_2}{\eta_2}=\cdots=\frac{\delta y_{n-1}}{\eta_{n-1}} \qquad (\eta_i=\mathrm{A}y_i)$$

となる。

したがって考えている Pfaff 系は不変であって，明らかに完全積分可能である。なぜならこれは $y_1, \cdots, y_{n-1}$ に関する常微分方程式系になるからである。

たとえば，もし方程式

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

が無限小変換

$$Af=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

を許容すれば，全微分方程式

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}=0$$

は完全積分可能である。これを積分してわれわれは，与えられた方程式の第一積分を得る。最後にこの第一積分を一つの定数に等しいとおいて，これを既知の無限小変換を許容する一つの常微分方程式に直すことができる。これは求積によって積分することができる。

VII 与えられた微分方程式系が与えられた無限小変換を許容することを表わすこと

99. われわれはいまだ，与えられた微分方程式系

(2) $$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

が，与えられた無限小変換

(3) $$Af=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

を許容することを表わす解析的条件を示さなかった。

$$Xf = X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

とおこう。

結局，もし f が一つの第一積分であれば，すなわち f が方程式

$$Xf = 0$$

を満足すれば，Af もまた一つの第一積分であることを書き表わすことが問題である。いいかえれば方程式

$$X(Af) = 0$$

が方程式

$$Xf = 0$$

から導かれる一つの結果であることを書き表わすことが問題である。

われわれは，f の二次の偏微分を含む第一の方程式を，簡単な計算で示されるように $\frac{\partial f}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$，$\cdots$，$\frac{\partial f}{\partial x_n}$ に関して斉一次である方程式

$$X(Af) - A(Xf) = 0$$

でおきかえることができる。したがって求める条件は，たんに

(7)
$$X(Af) - A(Xf) = \rho Xf$$

という形の恒等式の存在である。ここに ρ は適当に選ばれた係数を表わすものである。

この条件は，もし記号が Xf である無限小変換をとれば一見満足されている。この変換は，空間の各点 M を，この点を通る積分曲線上へ移動する。したがってこの変換は各積分曲線を不変にする。もし全体一まとめのものと考えられた積分曲線に対する効果にのみ注意を向けるならば，この特別な無限小変換は恒等変換と同一の役割を演ずる。本章において行なった無限小変換の応用は，この特別な場合には消滅してしまうことが容易に認められる。同様な注意が無限小変換 λXf に対してもあてはまる。ただしここに λ は任意に与えられた因数である。

VIII 変分方程式

100. 変分方程式の概念は H. Poincaré に負うものである。これを無限小変換の概念に結びつけることができる。

一つの微分方程式系を考えて，それを

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1,\ \cdots,\ \frac{dX_n}{dt}=X_n \tag{8}$$

と書こう。ただしここに右辺は $x_1, \cdots, x_n, t$ の与えられた関数である。

$$x_1=f_1(t),\ x_2=f_2(t),\ \cdots,\ x_n=f_n(t) \tag{9}$$

をこの微分方程式系の一つの特殊解とする。これに無限に近い一つの解

$$x_1=f_1(t)+\varepsilon\xi_1,\ x_2=f_2(t)+\varepsilon\xi_2,\ \cdots,\ x_n=f_n(t)+\varepsilon\xi_n$$

をとろう。ここに ε は一つの無限小の定数であり，ξ は t の未知関数である。二次の無限小を無視してわれわれは，これらの未知関数を定義するための方程式

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial X_i}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial X_i}{\partial x_2}\xi_2+\cdots+\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\xi_n \tag{10}$$

を得る。これが考えている特殊解に関する変分方程式である。

変分方程式を作るのに用いられた，与えられた方程式の特殊解とは独立に，変分方程式の一つの特殊解を知ることが起こり得る。この場合量 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ は，実際偏微分方程式

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial t}+X_1\frac{\partial\xi_i}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial\xi_i}{\partial x_n}=\xi_1\frac{\partial X_i}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial X_i}{\partial x_2}+\cdots+\xi_n\frac{\partial X_i}{\partial x_n} \tag{11}$$

を満足する，$x_1, \cdots, x_n, t$ の定まった関数である。この場合には与えられた方程式は明らかに無限小変換

$$Af=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

を許容する。この変換は，実際方程式

$$x_1'=x_1+\varepsilon\xi_1,$$
$$x_2'=x_2+\varepsilon\xi_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n'=x_n+\varepsilon\xi_n,$$
$$t'=t$$

をもっている。積分曲線 (9) の変換曲線の方程式は

$$x_i+\varepsilon\xi_i=f_i(t)$$

または

$$x_i=f_i(t)-\varepsilon\xi_i$$

である。これはまた一つの積分曲線である。なぜなら $(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n)$ は変分方程式の一つの解を作っているからである。

さらに一般に，方程式 (11) のすべての解 (ξ_i) に，与えられた微分方程式系 (8) を不変にする無限に多くの無限小変換，すなわち変換

$$(12)\qquad \mathrm{B}f=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{X}_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{X}_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

が対応する。ただしここに λ は任意の関数である。

逆に，与えられた微分方程式系を不変にする一つの無限小変換を知っていると仮定しよう。これはつねに (12) の形におくことができる。積分曲線 (9) は，この変換によって，曲線

$$x_i+\varepsilon\xi_i+\varepsilon\lambda\mathrm{X}_i=f_i(t+\varepsilon\lambda),$$

または

$$x_i=f_i(t)-\varepsilon\xi_i+\varepsilon\lambda[f_i'(t)-\mathrm{X}_i]=f_i(t)-\varepsilon\xi_i$$

に変わる。したがって変分方程式 (11) は解 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ を許容する。

もっともこれらすべての性質は，方程式 (11) が，$\mathrm{A}f$ において $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ の係数が 0 である場合の関係 (7) を解析的に表わすに過ぎないという事実からも導かれる。

第 10 章

完全積分可能な Pfaff 系

I　Frobenius の定理

101. h 個の Pfaff の方程式系

(1)
$$\begin{cases}\omega_1 \equiv a_{11}dx_1 + a_{12}dx_2 + \cdots + a_{1n}dx_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ \omega_h \equiv a_{h1}dx_1 + a_{h2}dx_2 + \cdots + a_{hn}dx_n = 0\end{cases}$$

は，これが

(2)
$$dy_1 = dy_2 = \cdots = dy_h = 0$$

の形におき得る場合に完全積分可能である。

もしこれが完全積分可能であれば，形式 ω_i のおのおのは dy_1, dy_2, $\cdots$, dy_h に関して一次であり，したがってその微分 ω_i' は (2)，すなわち (1) を考慮に入れれば 0 となる。

一つの Pfaff 系が完全積分可能であるためには，その左辺の微分がこの系に属する方程式を考慮に入れれば 0 になることが必要である。

この逆を証明するためにまず，上にのべた性質は変数の選び方にも，h 個の左辺の選び方にも関係しないことに注意しよう。換言すれば，もしこの系に属する方程式を

$$\pi_1 \equiv \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{12}\omega_2 + \cdots + \alpha_{1h}\omega_h = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\pi_h \equiv \alpha_{h1}\omega_1 + \alpha_{h2}\omega_2 + \cdots + \alpha_{hh}\omega_h = 0$$

の形に書いても，微分 π_1', $\cdots$, π_h' はこの系の方程式を考えに入れれば 0 に

なる。実際

$$\pi_i' = \alpha_{i1}\omega_1' + \cdots + \alpha_{ih}\omega_h' + [d\alpha_{i1}\omega_1] + \cdots + [d\alpha_{ih}\omega_h]$$

であって，この右辺の各項は仮定によって上に示した条件の下で0となるからである。

さて，逆が $n-1$ 変数までは証明されたとして，逆を n 変数の場合に証明しよう。ω_i' は方程式 (1) を考慮に入れれば0になる。したがってさらに $dx_n=0$ とおけばなおさら0となる。したがって x_n を定まった媒介変数とみなせば，Pfaff 系 (1) は

$$dy_1=0,$$
$$\cdots$$
$$dy_h=0$$

の形に直される。ただしここに $y_1, \cdots, y_h$ は，$x_1, \cdots, x_{n-1}$ の h 個の独立な関数である。しかしながら媒介変数 x_n を含み得る。さて，もし x_n をもはや定数とはみなさないならば，Pfaff 系は明らかに

$$(3)\qquad \begin{cases} \pi_1 \equiv dy_1 + b_1 dx_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ \pi_h \equiv dy_h + b_h dx_n = 0 \end{cases}$$

という形に直し得る。ただしここに $b_1, \cdots, b_h$ は，$y_1, \cdots, y_h$ と，たとえば $x_{h+1}, \cdots, x_n$ の関数である。さらに

$$\pi_i' = [db_1 dx_1], \cdots, \pi_h' = [db_h dx_n]$$

が成立する。方程式 (3) を考慮に入れれば，これらの公式は

$$\pi_i' = \frac{\partial b_i}{\partial x_{h+1}}[dx_{h+1}dx_n] + \cdots + \frac{\partial b_i}{\partial x_{n-1}}[dx_{n-1}dx_n]$$

となる。

したがって仮定によれば，係数 b_i は $y_1, \cdots, y_h, x_n$ にのみ関係するという結果が導かれる。しかしながらこの場合には，方程式 (3) は一つの常微分方程式系となる。したがって (3) は

$$dz_1=0,\ \cdots,\ dz_h=0$$

の形に直すことができる。ここに $z_1, \cdots, z_h$ は h 個の独立な第一積分を示すものである。

102. Frobenius に負う以上の定理によれば，与えられた Pfaff 系の完全積分可能性の必要十分条件を，関係

$$[\omega_1\cdots\omega_h\omega_1{}']=0,\ \cdots,\ [\omega_1\cdots\omega_h\omega_h{}']=0$$

で表わすことができる。

三変数の Pfaff の方程式

$$\omega\equiv \mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz=0$$

を例にとろう。完全積分可能性の条件は

$$\begin{aligned}[\omega\omega']&\equiv\Big[(\mathrm{P}dx+\mathrm{Q}dy+\mathrm{R}dz)\Big(\overline{\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}}dydz+\overline{\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}}dzdx\\&\qquad\qquad+\overline{\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}}dxdy\Big)\Big]\\&\equiv\Big\{\mathrm{P}\Big(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z}\Big)+\mathrm{Q}\Big(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\Big)+\mathrm{R}\Big(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\Big)\Big\}[dxdydz]=0\end{aligned}$$

である。

II Pfaff 系の特性系の形成

103. 任意の与えられた Pfaff 系 (1) の特性 Pfaff 系を一般に求めることによって，上に行なった議論に一つの他の形を与えることができる。

Pfaff 系 (1) が微分方程式

$$\frac{dx_1}{\mathrm{X}_1}=\frac{dx_2}{\mathrm{X}_2}=\cdots=\frac{dx_n}{\mathrm{X}_n}\tag{4}$$

に対して不変であるためには，(1) の方程式が (4) の第一積分とその微分とを用いて表わし得ることが必要にしてかつ十分である。したがってまず $\omega_1, \cdots,$

ω_h が (4) を考慮に入れれば 0 になることが必要であり，つぎに形式

$$[\omega_1\omega_2\cdots\omega_h\omega_1'],\ \cdots,\ [\omega_1\omega_2\cdots\omega_h\omega_h']$$

が (4) の第一積分の微分を用いて表わし得ることが必要である。いい直せば，形式

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_h;\ [\omega_1\cdots\omega_h\omega_1'],\ \cdots,\ [\omega_1\omega_2\cdots\omega_h\omega_h']$$

の随伴系が方程式 (4) から導かれる結果であることが必要である。

逆にもしこの条件が満足されれば，そしてもし $y_1, \cdots, y_{n-1}$ が (4) の第一積分であれば，われわれは Pfaff 系の方程式を

$$\pi_1 \equiv dy_1 + b_{1,h+1}dy_{h+1} + \cdots + b_{1,n-1}dy_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi_h \equiv dy_h + b_{h,h+1}dy_{h+1} + \cdots + b_{h,n-1}dy_{n-1} = 0$$

の形に直すことができる。形式 $[\pi_1\pi_2\cdots\pi_h\pi_i']$ のなかには dx_n がはいってはならないから，微分 $\dfrac{\partial b_{i,h+1}}{\partial x_n}, \cdots, \dfrac{\partial b_{i,n-1}}{\partial x_n}$ はすべて 0 である。したがって方程式 (1) は，微分方程式系 (4) の第一積分とその微分とだけしかはいってこないように書かれ得る。したがって Pfaff 系 (1) は確かに方程式 (4) に対して不変である。

これから，(1) の特性系は，形式

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_h;\ [\omega_1\cdots\omega_h\omega_1'],\ \cdots,\ [\omega_1\cdots\omega_h\omega_h']$$

の随伴系に他ならないことがわかる。

とくにこの Pfaff 系が完全積分可能であるためには，この系が (1) に等しい，すなわち形式

$$[\omega_1\cdots\omega_h\omega_1'],\ \cdots,\ [\omega_1\cdots\omega_h\omega_h']$$

が恒等的に 0 になることが必要かつ十分である。

104. さらに (1) の特性系の方程式を

$$\begin{cases} \omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \cdots,\ \omega_h=0, \\ \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_1)} & \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_2)} & \cdots & \dfrac{\partial\omega_i'}{\partial(dx_n)} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \end{matrix} \right\| = 0 \end{cases}$$

の形に得ることもできる。

とくに一つの Pfaff の方程式

$$\omega \equiv a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots+a_ndx_n=0$$

の特性系は，方程式

$$\begin{cases} a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots+a_ndx_n=0, \\ \dfrac{a_{12}dx_2+a_{13}dx_3+\cdots+a_{1n}dx_n}{a_1}=\dfrac{a_{21}dx_1+a_{23}dx_3+\cdots+a_{2n}dx_n}{a_2} \\ =\cdots=\dfrac{a_{n1}dx_1+a_{n2}dx_2+\cdots+a_{n,n-1}dx_{n-1}}{a_n} \end{cases}$$

で与えられる。ただしここに

$$a_{ij}=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

とおいた。

われわれはさらに先へいって（第14章）この系にふたたびもどるであろう。

III　完全積分可能な Pfaff 系の積分

105. 完全積分可能な Pfaff 系にもどって，これを

(5)
$$\begin{cases} dz_1=a_{11}dx_1+\cdots+a_{1q}dx_q, \\ \cdots\cdots \\ dz_h=a_{h1}dx_1+\cdots+a_{hq}dx_q \end{cases}$$

と書こう。

この Pfaff 系の積分は，ただ一つの独立変数 x_1 の，h 個の未知関数 $z_1, \cdots, z_h$ に関する常微分方程式系の積分になる。

事実われわれはこの系が，与えられた初期値 (x_i^0, z_j^0) に対応する一つ，そしてただ一つの解を許容することを知っている。独立変数の与えられた数値 $x_1^1, \cdots, x_q^1$ の集まりに対応する未知関数 $z_1, \cdots, z_h$ の値を得るために，積分集合体の上で点 (x_i^0) から点 (x_i^1) まで移動し，z_j の変化を調べよう。独立変数の中間の値の配列がどうあろうとも，結果はつねに同じはずである。

たとえば

$$x_2-x_2^0=m_2(x_1-x_1^0),\ \cdots,\ x_q-x_q^0=m_q(x_1-x_1^0)$$

とおこう。ただしここに $m_1, \cdots, m_q$ は $q-1$ 個の量

$$m_i=\frac{x_i^1-x_i^0}{x_1^1-x_1^0} \qquad (i=2, \cdots, q)$$

を示すものである。

そうすればわれわれは

$$(6)\qquad \begin{cases} dz_1=(a_{11}+a_{12}m_2+\cdots+a_{1q}m_q)dx_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ dz_h=(a_{h1}+a_{h2}m_2+\cdots+a_{hq}m_q)dx_1 \end{cases}$$

を得る。

われわれはこの常微分方程式系を積分し，$x_1=x_1^0$ に対して未知関数の値 $z_1^0, \cdots, z_h^0$ に対応する解を定めればよい。この解が一度定まったならば，媒介的な量 $m_2, \cdots, m_q$ を上に示したその値でおきかえることによってわれわれは $z_1^1, \cdots, z_h^1$ を得る。

実際は上につけた指標1を省略する。得られた解において m_i を $\dfrac{x_i-x_i^0}{x_1-x_1^0}$ でおきかえるだけである。かくしてわれわれは未知関数 $z_1, \cdots, z_h$ に対する表現を得る。

$q-1$ 個の媒介変数 m_i をもった常微分方程式系 (6) の第一積分を知っても，必ずしも Pfaff 系 (5) の第一積分を知り得ないことに注意すべきである。

IV 完　全　系

106. 完全積分可能な Pfaff 系 (1) にもどって，その h 個の独立な第一積分の集まりを $y_1, \cdots, y_h$ で表わそう。つぎに互いに独立で，しかも形式 $\omega_1, \cdots, \omega_h$ とも独立な，$n-h$ 個の一次微分形式

$$\omega_{h+1}, \quad \cdots, \quad \omega_n$$

を任意に選ぼう。$dx_1, \cdots, dx_n$ に関するすべての一次形式は，$\omega_1, \cdots, \omega_n$ の一次関数として，一通りそしてただ一通りの仕方で表わし得られる。つぎに一つの不定な関数 f をとってその全微分

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

を考えよう。われわれはこれを $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を用いて一次の形に表わし得る。ここに係数は明らかに $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ に関して斉一次である。

$$df=X_1f\cdot\omega_1+X_2f\cdot\omega_2+\cdots+X_nf\cdot\omega_n \tag{7}$$

とする。

n 個の式 X_if は $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ に関して一次独立である。

さて，完全積分可能な Pfaff 系 (1) のすべての第一積分は，$dx_1, \cdots, dx_n$ に関する一次形式と考えられたその微分が，方程式 (1) が満足されているというだけの条件で 0 になるという性質で特長づけられる。いいかえれば，

$$X_{h+1}f, \quad \cdots, \quad X_nf$$

を 0 にするという性質によって特長づけられる。

したがって $n-h$ 個の独立な一次偏微分方程式系

$$X_{h+1}f=0, \quad \cdots, \quad X_nf=0 \tag{8}$$

は，h 個の独立な解 $y_1, \cdots, y_h$ を許容する。

逆に，方程式系 (8) が h 個の独立な解（明らかにこれ以上の解を許容し得ない）

$$y_1,\ \cdots,\ y_h$$

を許容すると仮定しよう。

恒等式 (7) はわれわれに

(9)　　$$dy_i = X_1 y_i \cdot \omega_1 + X_2 y_i \cdot \omega_2 + \cdots + X_h y_i \cdot \omega_h \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ h)$$

を与える。

y_i は独立な関数であるから，方程式 (9) の右辺は，$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_h$ の独立な一次結合である。したがって系 (1) は (2) に等値であり，したがって完全積分可能である。

方程式 (8) は，もしこれらが最大数 h 個の独立な解を許容すれば，**完全系**を作るということにしよう。完全積分可能なすべての Pfaff 系には，一つの完全系が対応し，その逆も成立することがみられる。その対応は，もし Pfaff 系の方程式が

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_h = 0$$

であれば，完全系の方程式は

$$X_{h+1}f = X_{h+2}f = \cdots = X_n f = 0$$

となるような対応である。

107. 与えられた一階線型偏微分方程式系が完全であるための条件を見いだすのは容易である。

恒等式 (7) から出発して，これを外微分しよう。われわれは容易に

(9)　　$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k f \cdot \omega_k' + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} X_i (X_j f) [\omega_i \omega_j] = 0$$

を得る。

n 個の共変式 ω_k' は，$\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n$ の外二次形式として表わし得られる。すなわち

(10)　　$$\omega_k' = \sum_{(ij)}^{1,\ \cdots,\ n} c_{ijk} [\omega_i \omega_j].$$

恒等式 (9) において $[\omega_i\omega_j]$ に関する項の集りを 0 に等しいとおいて

$$X_i(X_jf)-X_j(X_if)+\sum_{k=1}^{k=n}c_{ijk}X_kf=0 \tag{11}$$

が見いだされる。

公式 (10) と (11) の双対性に注意しよう。

さて Pfaff 系 (1) は完全積分可能であると仮定しよう。これは，Frobenius の定理によれば，ω_1', $\cdots$, ω_h' が ω_1, $\cdots$, ω_k と共に 0 になることを意味している。いいかえれば

$$c_{h+i,\,h+j,\,k}=0 \qquad (i,\,j=1,\,\cdots,\,n-h;\ k=1,\,\cdots,\,h)$$

であることを意味している。

したがって (11) によれば，結合

$$X_{h+i}(X_{h+j}f)-X_{h+j}(X_{h+i}f)$$

は，$X_{h+1}f$, $\cdots$, X_nf にのみ一次に関係する。逆は明らかである。

結合 $X(Yf)-Y(Xf)$ を $(XY)f$ で表わすことに約束しよう。そうすれば，Pfaff 系が完全であるために必要かつ十分な条件は，二つずつとったすべての左辺のかっこが，これらの左辺の一次結合になることである。

第 11 章

最 終 乗 式 の 理 論

I 定 義 と 性 質

108. 最大次数 n の積分不変式

$$\Omega = \mathrm{M}[(\delta x_1 - \mathrm{X}_1\delta t)(\delta x_2 - \mathrm{X}_2\delta t)\cdots(\delta x_n - \mathrm{X}_n\delta t)]$$

を許容する微分方程式系

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{X}_1,\ \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{X}_2,\ \cdots,\ \frac{dx_n}{dt} = \mathrm{X}_n \tag{1}$$

を考えよう。すでにみたように（第80項），こうなるための条件は，外微分 Ω' が 0 になることである。これから簡単な計算によって

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathrm{MX}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mathrm{MX}_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial(\mathrm{MX}_n)}{\partial x_n} = 0 \tag{2}$$

が得られる。

係数 M は **Jacobi の乗式**の名で知られている。

条件 (2) は，すでに知っているように，形式 Ω が微分方程式系 (1) の n 個の独立な第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$$

とその微分で表わし得られることを示している。いいかえれば

$$\begin{aligned}\mathrm{M}[(\delta x_1 - \mathrm{X}_1\delta t)(\delta x_2 - \mathrm{X}_2\delta t)\cdots(\delta x_n - \mathrm{X}_n\delta t)]\\ = \mathrm{H}(y_1,\ \cdots,\ y_n)[\delta y_1,\ \cdots,\ \delta y_n]\end{aligned} \tag{3}$$

という恒等式の成立することを示している。

さていまやわれわれにとって，Jacobi の乗式に関する古典的な定理を再発見

することが可能である。

定理 I. 二つの乗式 M および M′ の商は一つの第一積分である。実際二つの乗式 M および M′ に関する二つの恒等式 (3) から

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}=\frac{\mathrm{H}(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\mathrm{H}'(y_1, y_2, \cdots, y_n)}$$

が得られる。

定理 II. もし方程式 (1) の p 個の独立な第一積分を知れば，与えられた微分方程式系の積分がそれに帰着される，$n-p$ 個の微分方程式系の乗式を一つ決定することができる。

p 個の独立な第一積分 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ を知っていると仮定し，さらに，これはつねに許されることであるが，これらの第一積分は p 個の変数 $x_1, \cdots, x_p$ の独立な関数であると仮定しよう。すなわち

$$\frac{\mathrm{D}(y_1\cdots y_p)}{\mathrm{D}(x_1\cdots x_p)}\neq 0$$

であると仮定しよう。

そうすれば方程式 (1) は

$$(4)\qquad \frac{dy_1}{dt}=0,\ \cdots,\ \frac{dy_p}{dt}=0,$$

$$(5)\qquad \frac{dx_{p+1}}{dt}=\mathrm{X}_{p+1},\ \cdots,\ \frac{dx_n}{dt}=\mathrm{X}_n$$

と書かれる。したがって $y_1, \cdots, y_p$ を任意定数 $\mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_p$ に等しいとおけば，微分方程式系 (1) の積分は微分方程式系 (5) の積分に帰着せしめられる。ただしここに (5) の右辺においては，$x_1, \cdots, x_p$ を $x_{p+1}, \cdots, x_n, t, \mathrm{C}_1, \cdots, \mathrm{C}_p$ の関数としてのその値でおきかえたものと仮定する。

さて方程式 (4) および (5) に対して不変である形式 Ω は，明らかに

$$\Omega=\mathrm{N}[\delta y_1\cdots\delta y_p(\delta x_{p+1}-\mathrm{X}_{p+1}\delta t)\cdots(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)]$$

と書かれ得る。係数の値Nを得るためには，この式を最初の式に等しいとおけばよい。たとえば

$$[\delta x_1,\ \delta x_2,\ \cdots,\ \delta x_n]$$

の項を等しいとおいて

$$\mathrm{M}=\mathrm{N}\frac{\mathrm{D}(y_1,\ \cdots,\ y_p)}{\mathrm{D}(x_1,\ \cdots,\ x_p)}$$

が得られる。

量Nが決定されれば，われわれは恒等式

$$\mathrm{N}[\delta y_1\cdots\delta y_p(\delta x_{p+1}-\mathrm{X}_{p+1}\delta t)\cdots(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)]=\mathrm{H}[\delta y_1\cdots\delta y_p\delta y_{p+1}\cdots\delta y_n],$$

すなわち

$$[\delta y_1\delta y_2\cdots\delta y_p\{\mathrm{N}(\delta x_{p+1}-\mathrm{X}_{p+1}\delta t)\cdots(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)-\mathrm{H}\delta y_{p+1}\cdots\delta y_n\}]=0$$

を得る。

この等式は，一次関係

$$\delta y_1=0,\ \delta y_2=0,\ \cdots,\ \delta y_p=0$$

を考慮に入れれば

(6)　$$\mathrm{N}[(\delta x_{p+1}-\mathrm{X}_{p+1}\delta t)\cdots(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)]=\mathrm{H}(y_1\cdots y_n)[\delta y_{p+1}\cdots\delta y_n]$$

の成立することを示している（第64項）。

したがってこの等式の左辺は，微分方程式系 (5) に対する一つの不変形式である。いいかえれば，微分方程式系 (5) は乗式

$$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{M}}{\dfrac{\mathrm{D}(y_1,\ \cdots,\ y_p)}{\mathrm{D}(x_1,\ \cdots,\ x_p)}}$$

を許容する。

定理 III. もし方程式 (1) の $n-1$ 個の独立な第一積分を知れば，この方程式の積分は求積によって完了される。

定理IIを $p=n-1$ の場合にあてはめればよい。そうすれば，変数が関係

$$y_1=\mathrm{C}_1,\ y_2=\mathrm{C}_2,\ \cdots,\ y_{n-1}=\mathrm{C}_{n-1}$$

で結ばれていると考えた場合，一次微分形式

$$\frac{\mathrm{M}}{\dfrac{\mathrm{D}(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})}{\mathrm{D}(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})}}(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)$$

は一つの完全微分であるのがみられる。

したがって方程式 (1) の一般解は，全微分の積分

$$\int\frac{\mathrm{M}}{\dfrac{\mathrm{D}(y_1,\ \cdots,\ y_p)}{\mathrm{D}(x_1,\ \cdots,\ x_p)}}(\delta x_n-\mathrm{X}_n\delta t)$$

を一つの定数に等しいとおいて得られる。

II 拡　　　張

109. 最終乗式の定理は，任意次数 $r<n$ の不変形式 Ω を知っているという，さらに一般な場合にまで拡張することができる。$n-1$ 個の独立な第一積分 y_1, $\cdots$, y_{n-1} を知っていると仮定しよう。これらの積分のうちの $n-r$ 個

$$y_{\alpha_1},\ y_{\alpha_2},\ \cdots,\ y_{\alpha_{n-r}}$$

をあらゆる仕方で選び出し，明らかに不変な形式

$$[\delta y_{\alpha_1}\delta y_{\alpha_2}\cdots\delta y_{\alpha_{n-r}}\Omega]$$

を考えよう。これらの形式はすべて次数 n である。もしこれらが全部は 0 でなければ，問題は前に研究した場合に帰着する。すなわちわれわれは一つの乗式を得る。またはいくつかの乗式を得ることさえある。そしてさらにある場合には，定理 I が，これらの乗式のうちの二つを互いに割り算することによって，最後の第一積分を与えることもあり得る。

例外の場合は，上に書いに形式がすべて 0 の場合である。さて Ω は，δy_1, $\cdots$, δy_{n-1} と，（未知の）n 番目の第一積分の微分 δy_n とで表わされていると想像しよう。われわれのおいた仮定は，Ω が δy_n を含まぬということになる。なぜなら，もし Ω が

$$\mathrm{A}[\delta y_1\cdots\delta y_{r-1}\delta y_n]$$

のような 0 でない項を含むとすれば，Ω と δy_{r+1}, $\cdots$, δy_{n-1} との外積は 0 にならないからである。

さて Ω は $\delta y, \cdots, \delta y_{n-1}$ に関する一つの外形式となる。われわれはその係数を計算することができる。これらの係数のおのおのは一つの第一積分である。もしこれらの係数の少なくも一つが $y_1, \cdots, y_{n-1}$ と独立ならば，これを一つの任意定数に等しいとおいて積分が完了する。ただ一つの疑わしい場合は，すべての係数が $y_1, \cdots, y_{n-1}$ の関数である場合である。さてこの場合には，不変形式 Ω を知っているということが，積分を完了するのになんらの助けにもならぬことは明らかである。ただこの場合には，与えられた方程式が Ω の特性系を作っていないことに注意しよう。

したがってわれわれはつぎの一般な定理をのべることができる。

与えられた微分方程式系 (1) を特性系として許容する一つの不変微分形式 Ω を知れば，もし $n-1$ 個の独立な第一積分がわかれば，最も都合の悪い場合にも，この系の積分を求積で完了することができる。

110. Jacobi の最終乗式の理論のもう一つの拡張は，完全積分可能な Pfaff 系に関するものである。

$$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \cdots,\ \omega_r=0$$

を完全積分可能な Pfaff 系とし，その最大次数 r の不変形式

$$\Omega=\mathrm{M}[\omega_1\omega_2\cdots\omega_r]$$

を一つ知っているとしよう。

この系の $r-1$ 個の第一積分 $y_1, \cdots, y_{r-1}$ を知れば，積分を一つの求積で完了することができる。実際 $y_1, \cdots, y_{r-1}$ を任意定数に等しいとおけば，与えられた系はただ一つの方程式，たとえば $\omega_r=0$ となり，われわれは

$$\Omega=\mathrm{N}[\delta y_1\cdots\delta y_{r-1}\omega_r]$$

という公式を得る。ここに係数 N は容易な等置法によって M から導かれる。これから，$\mathrm{N}\omega_r$ は，なお積分すべきただ一つの方程式 $\omega_r=0$ に対する不変形式であることがわかる。いいかえれば $\mathrm{N}\omega_r$ は一つの完全微分である。したがって積分は一つの求積で完了される。

最後に，上に考えたすべての場合を要約する全く一般な定理はつぎのとおりである。

微分形式 Ω を知れば，最も都合の悪い場合にも，すでに $r-1$ 個の独立な第一積分を知っているならば，この形式の特性系の積分を一つの求積で完了することができる。ただしここに r はこの形式のクラスを示すものとする。

III　独立変数がとくに指定されていない場合

111. もし与えられた微分方程式系が

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$$

の形におかれていれば，$n-1$ 次の積分不変式はすべて

$$\Omega=MX_1[dx_2dx_3\cdots dx_n]-MX_n[dx_1dx_3\cdots dx_n]+\cdots$$
$$-(-1)^nMX_n[dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}]$$

の形である。したがって条件 $\Omega'=0$ は

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}=0$$

となる。

この書き方の差さえ別にすれば，理論は上にのべたそれと全く同一である。

IV　与えられた方程式が一つの無限小変換を許容する場合

112. r 次の不変形式を許容する完全積分可能な Pfaff 系

(7)　$$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ \cdots,\ \omega_r=0$$

という一般な場合をとろう。この不変形式は

$$\Omega=[\omega_1\omega_2\cdots\omega_r]$$

の形に直されていると，つねに仮定することができる。

このPfaff系が一つの既知の無限小変換 Af を許容すると仮定して，量

$$\omega_1(A),\ \omega_2(A),\ \cdots,\ \omega_r(A)$$

を作ろう。そしてわれわれは，これらが，すべては0でないと仮定する。与えられた系の方程式は，Ω が同じ形を保って

$$\omega_1(A)=1,\ \omega_2(A)=\omega_3(A)=\cdots=\omega_r(A)=0 \tag{8}$$

が成立するように書かれていると，つねに仮定することができる。

すでに上にみたように（第88項），無限小変換 Af を知れば，形式 $\Omega(\delta)$ から他の不変形式 $\Omega(A,\delta)$ を導くことができる。これはここにおいた仮定によれば

$$\Omega(A,\delta)=[\omega_2\cdots\omega_r]$$

となる。

われわれはこの新しい不変形式を文字 Π で表わそう。われわれは

$$\Omega=[\omega_1\Pi]$$

を得る。

Π の随伴（そして特性でない）系は

$$\omega_2=0,\ \omega_3=0,\ \cdots,\ \omega_r=0 \tag{9}$$

である。これは完全積分可能である。このことは，前の定理（第98項）からも出るが，Ω が与えられた系の r 個の第一積分 $y_1,\cdots,y_r$ とその微分とで表わし得られるということからも出る。$\Omega(A,\delta)$ の随伴系もまた，$y_1,\cdots,y_r$ とその微分しか含まない。したがってこれは常微分方程式系である。したがって完全積分可能である。

さて形式 Π の外微分 Π' を作ろう。これは r 次の一つの新しい不変形式である。したがってわれわれは

$$\Pi'=m\Omega=m[\omega_1\Pi]$$

を得る。

係数 m は一つの第一積分である。しかしながらここになすべき議論が残っている。

1°　$m=0$. Π' は 0 である。したがって Π の随伴系 (9) はその特性系である。したがってわれわれは系 (9) の一つの乗式を知っている。したがってこの系の $r-2$ 個の独立な第一積分を知れば，積分は一つの求積で完了される。さらにもう一度求積を行なえば，与えられた系 (7) の積分が完了する。この求積は明らかに $\int\omega_1$ である。

ここに Π および Ω が

$$\Pi=[\delta y_2\cdots\delta y_r],\quad \Omega=[\delta y_1\delta y_2\cdots\delta y_r]$$

に直し得ることは明らかである。与えられた系の第一積分に施された変換 Af は

$$\mathrm{A}f=\frac{\partial f}{\partial y_1}$$

となる。

与えられたものが同一であるように，すなわち Ω と Af が変わらないように第一積分を選ぶ方法は無限に存在する。すなわち $y_2, y_3, \cdots, y_r$ に関数行列式が 1 である任意の変換を施し，y_1 に $y_2, \cdots, y_r$ の任意の関数をつけ加えることができる。これは，積分に起こる簡単化の本質を説明している。

2°　m は定数であるが 0 ではない。この場合には Pfaff 系 (9) を積分したと仮定し，$y_2, \cdots, y_r$ を $r-1$ 個の独立な積分の集まりとする。そうすれば

$$\Pi=\mathrm{H}[\delta y_2\delta y_3\cdots\delta y_r]$$

を得る。ここに係数 H は $y_2, \cdots, y_r$ に関係しない。もしそうでないとすれば，Π' は 0 になるからである。しかもこれは与えられた Pfaff 系の第一積分となる。したがってわれわれは，たんに微分によって与えられた Pfaff 系の n 番目の積分を得る。

H の代わりに y_1 と書いて，われわれは

$$\Omega=\frac{1}{m}[\delta y_1\delta y_2\cdots\delta y_r],\quad \Pi=y_1[\delta y_2\cdots\delta y_r],\quad \mathrm{A}f=my_1\frac{\partial f}{\partial y_1}$$

を得る。

与えられたものを変えない，$y_1, \cdots, y_r$ に対する最も一般な変換は，y_2,

$\cdots, y_r$ に対しては任意の変換を施し，

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{\dfrac{D(\bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_r)}{D(y_2, \cdots, y_r)}}$$

とおいて得られる。

これは，Pfaff 系 (9) の積分がなぜ簡単化されないか，またもしこの積分が行なわれれば，与えられた Pfaff 系 (7) の積分がこれから導かれるかを説明している。

3° 係数 m は定数でないが，$A(m)$ は 0 である。関数 m は Pfaff 系 (9) の第一積分である。この Pfaff 系の積分は，$r-2$ 個の未知関数をもった微分方程式系の積分になる。与えられた Pfaff 系の積分は，前の場合と同様これから導かれる。

形式 Π は

$$\Pi = y_1[\delta m \delta y_3 \cdots \delta y_r]$$

と直し得られるから，われわれは

$$\Omega = \frac{1}{m}[\delta y_1 \delta m \delta y_3 \cdots \delta y_r], \quad Af = my_1\frac{\partial f}{\partial y_1}$$

を得る。

与えられたものを変えない変換は

$$\begin{cases} \bar{m} = m, \ \bar{y}_3 = f_3(m, y_3, \cdots, y_r), \ \cdots, \ \bar{y}_r = f_r(m, y_3, \cdots, y_r), \\ \bar{y}_1 = \dfrac{y_1}{\dfrac{D(f_3 \cdots f_r)}{D(y_3 \cdots y_r)}} \end{cases}$$

である。これは積分に現われる簡単化を説明している。

4° 係数 m は定数でなく，しかも $Am = m_1 \neq 0$.

$m, m_1, \cdots, m_{i-1}$ は与えられた Pfaff 系の i 個の独立な第一積分であり，m_i は $m, m_1, \cdots, m_{i-1}$ の関数であると仮定して直ちに一般な場合

$$Am = m_1, \ Am_1 = m_2, \ \cdots, \ Am_{i-1} = m_i$$

をとろう。

そうすれば，与えられた Pfaff 系は i 個の独立な既知の第一積分を許容し，その積分は，その一つの乗式を知っている，$r-i$ 個の未知関数をもった微分方程式系の積分になる。

Ω と Af の標準形を求めよう。われわれはつねに

$$\Omega=\mathrm{H}[\delta m\delta m_1\cdots\delta m_{i-1}\delta y_{i+1}\cdots\delta y_r]$$

とおくことができる。ここに $y_{i+1},\cdots,y_r$ は Pfaff 系 (9) の $r-i$ 個の第一積分であり，H は $m_1,\cdots,m_{i-1},\ y_{i+1},\cdots,y_r$ の関数である。明らかに

$$\mathrm{A}f=m_1\frac{\partial f}{\partial m}+m_2\frac{\partial f}{\partial m_1}+\cdots+m_i\frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}$$

である。

$\Pi=\Omega(\mathrm{A},\delta)$ の外微分が $m\Omega$ に等しい，または同じことであるが

$$\mathrm{A}(\Omega)=m\Omega$$

であることを書き表わそう。

$$\mathrm{A}(\Omega)=\left(\mathrm{A}(\mathrm{H})+\frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}}\mathrm{H}\right)[\delta m\delta m_1\cdots\delta m_{i-1}\delta y_{i+1}\cdots\delta y_r]$$

である。したがって

$$\mathrm{A}(\mathrm{H})+\frac{\partial m_i}{\partial m_{i-1}}\mathrm{H}=m\mathrm{H}$$

でなければならない。

$h(m,m_1,\cdots,m_{i-1})$ をこの偏微分方程式の一つの特殊解とする。この式は

$$\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{H}}{h}\right)=0$$

と書かれる。いいかえれば $\frac{\mathrm{H}}{h}$ は方程式 (9) の一つの積分である。したがってこの関数が1になるように $y_{i+1},\cdots,y_r$ を選ぶことができる。そうすれば

$$\Omega=h(m,\cdots,m_{i-1})[\delta m\delta m_1\cdots\delta m_{i-1}\delta y_{i+1}\cdots\delta y_r],$$

$$\mathrm{A}f=m_1\frac{\partial f}{\partial m}+m_2\frac{\partial f}{\partial m_1}+\cdots+m_i\frac{\partial f}{\partial m_{i-1}}$$

を得る。

与えられたものを変えない変換は明らかに

$$\bar{m}=m,\ \bar{m}_1=m_1,\ \cdots,\ \bar{m}_{i-1}=m_{i-1},$$

$$\bar{y}_{i+1}=f_{i+1}(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_{i-1},\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_r),\ \cdots,$$

$$\bar{y}_r=f_r(\mu_1,\ \cdots,\ \mu_{i-1},\ y_{i+1},\ \cdots,\ y_r)$$

である。ただしここに

$$\frac{D(\bar{y}_{i+1}\cdots\bar{y}_r)}{D(y_{i+1}\cdots y_r)}=1$$

である。

($A\mu=0$ を満足する，$m, m_1, \cdots, m_{i-1}$ の $i-1$ 個の独立な関数を $\mu_1, \cdots, \mu_{i-1}$ で示した。)

以上の変換の性質は，積分に起こる簡単化を説明している。

もっとも $i=r$ という場合が起こり得る。この場合には全然積分を行なう必要はない。なぜなら微分によって r 個の独立な積分が得られるからである。

V　応　　　　用

113. 最終乗式の理論は，未知関数の数に等しい次数の不変形式がはいってくる，上に示したすべての例にあてはまる。これらの例を思い出そう。

1° まず，その密度 ρ と，その速度の成分 u, v, w, を x, y, z, t の関数として知っている場合の，運続的な物質の分子の運動を与える方程式

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w$$

をとろう。積分不変式は

$$\Omega=\rho[(\delta x-u\delta t)(\delta y-v\delta t)(\delta z-w\delta t)]$$

であるから，乗式は ρ である。したがってもし二つの独立な第一積分を知れば，積分は一つの求積で完了される。

もし運動が定常であれば，不変形式

$$\Pi=\Omega(A,\ \delta)=-\rho u[\delta y\delta z]-\rho v[\delta z\delta x]-\delta w[\delta x\delta y]$$

の微分は0である。幾何学的軌道を与える方程式

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

は一つの乗式 ρ を許容する。したがってもし一つの第一積分を知れば，軌道の決定にはただ一回の求積しか必要でない。そして最後にもう一度求積をすれば，t が与えられる。

2° 与えられたベクトル場 (X, Y, Z) の渦動線を与える方程式は，形式

$$[\delta X\delta x]+[\delta Y\delta y]+[\delta Z\delta z]=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)[\delta y\delta z]+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)[\delta z\delta x]$$
$$+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)[\delta x\delta y]$$

の特性方程式である。これらの方程式

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial X}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}}$$

は，既知の乗式を許容する。これは1である。

3° 標準形に書かれた力学の方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

は乗式1を許容する。これは直接の計算によって得られる。これはまた，不変形式

$$\Omega=\sum_{i=1}^{i=n}\left[\left(\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t\right)\left(\delta p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t\right)\right]$$

の存在から，不変形式 Ω^n:

$$\frac{1}{n!}\Omega^n=\prod_{i=1}^{i=n}\left[\left(\delta q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t\right)\left(\delta p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t\right)\right]$$

の存在が導かれるという事実からも得られる。

114. しかしながら最終乗式の理論は，Hamilton の正準方程式が成立する物質系にあてはまるばかりでなく，完全ホロノーム束縛をもち，その系の位置に

のみ関係する与えられた力を受けるすべての質点系に対してあてはまる。

このような質点系に対しては，われわれは Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t)$$

を得る。

もし Q_i が 0 であれば，Hamilton の正準変数の導入によって，方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

が導かれる。これから運動の完全方程式は

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i$$

の形におかれ得ることがわかる。これは乗式 1 を許容する。いいかえれば，不変形式

$$\Omega=\left[\left(\delta q_1-\frac{\partial H}{\partial p_1}\delta t\right)\cdots\left(\delta q_n-\frac{\partial H}{\partial q_n}\delta t\right)\left(\delta p_1+\overline{\frac{\partial H}{\partial q_1}-Q_1\delta t}\right)\cdots\left(\delta p_n+\overline{\frac{\partial H}{\partial q_n}-Q_n\delta t}\right)\right]$$

を許容する。これは Lagrange の変数を用いれば，

$$\Omega=\prod_{i=1}^{i=n}\left[(\delta q_i-q_i'\delta t)\left(\delta\frac{\partial T}{\partial q_i'}-\overline{\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i\delta t}\right)\right]$$

と書かれる。

もし束縛も，与えられた力も時間に無関係であれば，運動の方程式は無限小変換

$$Af=\frac{\partial f}{\partial t}$$

を許容し，したがって不変形式 $\Pi=\Omega(A,\delta)$ を許容する。この微分は 0 である。一般論によれば，運動の方程式の積分は，（幾何学的）軌道の方程式

$$\frac{dq_i}{q_i'}=\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_i'}}{\dfrac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i}\quad \text{または}\quad \frac{dq_i}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}}=\frac{dp_i}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i}$$

の積分に直される。これに対して最終乗式の理論があてはまる。また時間を与

える求積に対してもあてはまる。実際，たとえば

$$\Omega=\left[\left(\delta t-\frac{\delta q_1}{q_1{}'}\right)\Pi\right]$$

が明らかに成立する。なぜなら $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ は Π に等しいからである。

115. 時間に関係するが，しかし既知の無限小変換をもった力の例として，定直線上の動点であるが，この直線上の定点からの距離に比例する力で（比例因数は時間の既知関数であるとして)引かれているという簡単な場合を考えよう。運動は，二階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k(t)x,$$

または連立微分方程式

$$\text{(10)} \qquad \frac{dx}{dt}=x', \quad \frac{dx'}{dt}+k(t)x=0$$

で与えられる。λ を任意の定数として，x を λx にかえてもこの二階微分方程式は変わらない。したがってこれに等値な微分方程式系は一つの無限小変換を許容するが，その効果は

$$x, \quad x', \quad t$$

を

$$(1+\varepsilon)x, \quad (1+\varepsilon)x',$$

にかえるものである。この変換の記号は

$$Af=x\frac{\partial f}{\partial x}+x'\frac{\partial f}{\partial x'}$$

である。

微分方程式系 (10) は，乗式 1 に対応して不変形式

$$\Omega=[(\delta x-x'\delta t)(\delta x'+kx\delta t)]$$

を許容する。ここに導形式 $\Omega(\mathrm{A}, \delta)$ は

$$\pi=x(\delta x'+kx\delta t)-x'(\delta x-x'\delta t)=x\delta x'-x'\delta x+(x'^2+kx^2)\delta t$$

である。これは一つの不変形式である。その外微分は

$$\pi' = 2[\delta x \delta x'] + 2x'[\delta x \delta t] + 2kx[\delta x \delta t] = 2\Omega$$

である。右辺における Ω の係数は定数であるから，与えられた微分方程式系の一般解を微分によって得るためには，完全積分可能な方程式 $\pi=0$ を積分すればよい。事実形式 π は $y_1 \delta y_2$ に帰着せしめられる。この形式 π は δ を d にかえて

$$\pi = x^2\left[d\frac{x'}{x} + \left(\frac{x'^2}{x^2}+k\right)dt\right]$$

と書かれる。したがって

$$\frac{x'}{x} = u$$

とおけば，Riccati の方程式

$$\frac{du}{dt} + u^2 + k = 0$$

を積分すればよいことになる。この方程式を積分したと考えよう。われわれは一つの第一積分を

$$y_2 = \frac{\alpha(t)u+\beta(t)}{\gamma(t)u+\delta(t)} = \frac{\alpha(t)x'+\beta(t)x}{\gamma(t)x'+\delta(t)x}$$

の形に得る。

π を $y_1 dy_2$ に等しいとおいて，たとえば dx' の項をとれば

$$x = y_1 x \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x' + \delta x)^2}$$

を得る。これから

$$y_1 = \frac{(\gamma x' + \delta x)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

を得る。

もし，つねに許されることであるが，行列式 $\alpha\delta-\beta\gamma$ は1に等しい（または単に定数に等しい）と仮定すれば，微分方程式系の一般解は，方程式

$$\alpha x' + \beta x = C_1,$$

$$\gamma x' + \delta x = C_2$$

で与えられ，したがってわれわれは

$$x = C_2\alpha(t) - C_1\gamma(t)$$

を得る。いいかえれば，Riccati の方程式の積分に表われる係数 $\alpha(t)$ および $\gamma(t)$ は，与えられた二階微分方程式の基本解の系を作っている。

これらの事情をさらに別の方向からのべることもできる。t と積分定数 y_2 とで表わされた，Riccati の方程式の一般解 u を知っていると仮定しよう。恒等式

$$y_1 dy_2 = x^2[du + (u^2 + k)dt]$$

は

$$y_1 = x^2 \frac{\partial u}{\partial y_2}$$

を与える。これから x が y_1, y_2 および t の関数として得られる。

$$u = \frac{\delta y_2 - \beta}{-\gamma y_2 + \alpha}$$

であるから，われわれは

$$x^2 = y_1(\alpha - \gamma y_2)^2$$

を得る。これから

$$x = C_1\alpha + C_2\gamma$$

が得られる。

116. 注意。Jacobi の最終乗式の理論は，上に示した問題以外の，他の力学の問題に対してもあてはまる。たとえば，空間におけるその位置のみの関数である力を受ける一つの質点の運動を考えよう。しかしその座標系は Oz 軸のまわりに一様な回転運動をしているとする。運動の方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} - X = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\alpha\frac{dx}{dt}-\mathrm{Y}=0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}\qquad\qquad-\mathrm{Z}=0$$

の形である。ただしここに X, Y, Z は x, y, z, t の与えられた関数である。これらを

$$\frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dx'}{dt}=-2\alpha y'+\mathrm{X},$$

$$\frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{dy'}{dt}=\ \ 2\alpha x'+\mathrm{Y},$$

$$\frac{dz}{dt}=z',\quad \frac{dz'}{dt}=\qquad\qquad \mathrm{Z}$$

と書けば，明らかに乗式1を許容する微分方程式系を得る。

117. われわれが考えようとする最後の応用は，流体力学の積分不変式

$$\Omega=\xi[\delta y\delta z]+\eta[\delta z\delta x]+\zeta[\delta x\delta y]+(\eta w-\zeta v)[\delta x\delta t]$$
$$+(\zeta u-\xi w)[\delta y\delta t]+(\xi v-\eta u)[\delta z\delta t]$$

によって与えられる。この不変式の特性系は，二つの Pfaff の方程式

$$\frac{dx-udt}{\xi}=\frac{dy-vdt}{\eta}=\frac{dz-wdt}{\zeta}$$

から作られている。

積分集合体は，宇宙 (x, y, z, t) において，たとえばその種々の次々の位置における渦動線によって作られる二次元の集合体である。

この微分方程式系の積分は，われわれがその一つの乗式を知っているところの，二つの未知関数をもった二つの微分方程式系の積分になる。分子の軌道（流線）の研究は，さらにもう一つの常微分方程式の積分を要求する。この微分方程式は全く任意であり得る。

もし運動が定常であれば，特性集合体は二回の求積によって与えられる。すなわち

$$\int\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}=\mathrm{C}$$

と，つぎに z について解いたと考えた上の方程式を考慮に入れた，

$$t+\int\frac{\eta dx-\xi dy}{\xi v-\eta u}=\mathrm{C}'$$

とである。

第 12 章

相対一次積分不変式を許容する方程式

I　積分の一般方法

118. 一つの Pfaff 形式 ω と，相対積分不変式 $\int\omega$ の特性系とを考えよう。これは形式 ω' の随伴系である。

まず ω は $2n+1$ 個の変数をもっていると仮定しよう。形式 ω' は偶数次であるから（第59項），その特性系は一般に $2n$ 個の方程式から成っている。したがって，一般に相対積分不変式 $\int\omega$ を許容する一つそしてただ一つの微分方程式系が存在する。ただしここに ω は $2n+1$ 変数の任意の Pfaff 形式である。力学の積分不変式の場合がそうである。

一般に，形式 ω' の階数（またはクラス）を $2n$ としよう。ω' の特性方程式の一つの積分法が容易に示される。

実際 y_1 をこれらの方程式の一つの第一積分としよう。（これは $2n$ 次の演算によって得られる。）もし変数を関係 $y_1=C_1$ で結べば，すなわちそれらの微分を関係 $dy_1=0$ で結べば，ω' の階数は減少する。しかもこれはつねに偶数であるから，$2n-2$ となる。つぎに y_2 をこの新しい特性系の第一積分とする。

$$y_1=C_1,\quad y_2=C_2$$

と仮定すれば，ω' の階数は $2n-4$ となる。等々。したがって順次

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 4,\ 2$$

次の演算によって，もし変数が関係

$$y_1=C_1,\ y_2=C_2,\ \cdots,\ y_n=C_n$$

で結ばれているとすれば，ω' の階数が 0 となるような n 個の第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$$

を見いだすことができるであろう。この場合 ω' は恒等的に 0 であるから，形式 ω は一つの完全微分である。したがって一回の求積によって ω を

$$\omega = dS$$

の形におくことができる。

関数 S は n 個の定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ に関係する。もし変数がもはや上に示した n 個の関係では結ばれていないと仮定すれば，われわれは明らかに

$$\omega = dS + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \cdots + z_n dy_n,$$

したがって

$$\omega' = [dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \cdots + [dz_n dy_n]$$

を得る。

ω' は階数 $2n$ であるから，$2n$ 個の微分 dy_i と dz_i とは一次独立である。したがって $2n$ 個の関数 y_i と z_i は，与えられた方程式の独立な第一積分の集合を作っている。かくしてこの微分方程式の積分は完了された。

結局積分は

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 4,\ 2,\ 0$$

次の $n+1$ 回の演算と微分とを必要とする。

注意 I．量 S はここでは中間的な役割しか果たしていない。これは一般に，不変式 $\int\omega$ の特性方程式の第一積分ではない。

注意 II．上に得た結果によれば，外微分が 0 であるすべての外二次形式は

$$[dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \cdots + [dz_n dy_n]$$

の形におかれ得る。

119. 正準形にはいってくる関数 y_i および z_i の選択が不定であるということを理解することが重要である。等式

$$[dz_1' dy_1'] + [dz_2' dy_2'] + \cdots + [dz_n' dy_n'] = [dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \cdots + [dz_n dy_n]$$

から，差

$$z_1'dy_1'+z_2'dy_2'+\cdots+z_n'dy_n'-(z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_ndy_n)$$

が一つの完全微分 dV であるという性質が導かれる。$y_1', \cdots, y_n'$ は $z_1, \cdots, z_n$ の独立な関数であると仮定しよう。これは一般な場合である。この場合には y_i と y_i' の間にはなんらの関係もない。V を y_i と y_i' の関数として表わして，これから

$$z_i'=\frac{\partial V}{\partial y_i'},\quad z_i=-\frac{\partial V}{\partial y_i}$$

が導かれる。

2n 個の変数をもった一つの任意関数のはいってくるこれらの方程式は，y' および z' を y および z の関数として書き表わすことを可能ならしめる。実際後の n 個の方程式は $y_1', \cdots, y_n'$ を与え，つぎに前の n 個の方程式は $z_1', \cdots, z_n'$ を与える。これは

$$\frac{D\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_1}, \dfrac{\partial V}{\partial y_2}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial y_n}\right)}{D(y_1', y_2', \cdots, y_n')}=0$$

でないことを仮定している。

同じ条件のもとで，最初の n 個の方程式を用いて y を y' および z' の関数として求め，つぎに後の n 個の方程式を用いて z を得ることができる。

y と y' の間に一つまたはいくつかの関係がある場合をも同様に取り扱うことができる。

変数 y および z に対して，すなわち与えられた方程式の積分曲線に対して，このように定義された変換の集まりは，Jacobi の乗式の理論において，関数行列式が 1 に等しい変換群と同じ役割をこの理論において演ずる一つの無限次元の群を定義する。

120. ω' の特性方程式の積分にもどろう。それらを任意の定数に等しいとおけば ω' の階数が 0 になる，すなわち ω が一つの完全微分になるような，$N>n$ 個の独立な第一積分 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ をなんらかの方法で知ることができたと仮定

しよう。そうすれば，求積に続いて微分を行なえば

$$\omega = dS + z_1 dy_1 + z_2 dy_2 + \cdots + z_N dy_N$$

が得られる。$z_1, z_2, \cdots, z_N$ が第一積分であるのは容易にみられる。

実際関数 y_i と z_i のなかに $N+r$ 個独立なものがあると仮定しよう。そうすれば関数 z_i を y_i とそのうちの r 個とで表わすことができる。われわれはこの r 個を $t_1, t_2, \cdots, t_r$ とよぼう。さて

$$\omega' = [dz_1 dy_1] + [dz_2 dy_2] + \cdots + [dz_N dy_N]$$

である。

ω' の特性系は，仮定によって方程式

$$dy_1 = 0,\ \ dy_2 = 0,\ \ \cdots,\ \ dy_N = 0$$

を含んでいる。これはまた方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial [\partial y_i]} \equiv -dz_i + \frac{\partial z_1}{\partial y_i} dy_1 + \frac{\partial z_2}{\partial y_i} dy_2 + \cdots + \frac{\partial z_N}{\partial y_i} dy_N = 0,$$

したがって方程式

$$dz_i = 0$$

を含んでいる。

これから z_i は第一積分であり，他方 $N+r$ は $2n$ に等しくなければならぬのがみられる。

結局，もしそれらを任意定数に等しいとおけば，ω を一つの完全微分とするようなN個の第一積分を知れば，積分を一つの求積と微分とで完了することができる。

121. 実際には，与えられた微分方程式のすべての解ではなく，N個の第一積分 $y_1, \cdots, y_N$ が与えられた数値をもつような解のみを求めることが起こり得る。この場合にはつぎのように進めていくことができる。形式 ω' は，$dy_1, \cdots, dy_N$ を0にすれば0となるのであるから，無限に多くの仕方で

$$\omega' = [dy_1 \pi_1] + [dy_2 \pi_2] + \cdots + [dy_N \pi_N]$$

という形におくことができる。ここに π_i は適当に選ばれた一次形式である。これら N 個の形式 π_i のうちには，互いに独立でしかも dy_i とも独立なものが $2n-\mathrm{N}$ 個存在する。$\pi_1, \cdots, \pi_{2n-\mathrm{N}}$ がそうであると仮定しよう。ω' の特性系は，明らかに方程式

$$dy_1 = dy_2 = \cdots = dy_{\mathrm{N}} = 0,$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_{2n-\mathrm{N}} = 0$$

から成っている。ω' の外微分が 0 であることを書き表わそう。われわれは

$$[dy_1\pi_1'] + [dy_2\pi_2'] + \cdots + [dy_{\mathrm{N}}\pi_{\mathrm{N}}'] = 0$$

を得る。これからとくに $[dy_2 dy_3 \cdots dy_{\mathrm{N}}]$ を外的にかけて

$$[dy_1 dy_2 \cdots dy_{\mathrm{N}}\pi_1'] = 0$$

を得る。

したがって形式 π_1（そして形式 $\pi_2, \cdots, \pi_{2n-\mathrm{N}}$ も）は，y_i に一定の数値を与えるならば完全微分である。したがって求める解は $2n-\mathrm{N}$ 回の独立な求積

$$\int \pi_1 = \gamma_1, \quad \cdots, \quad \int \pi_{2n-\mathrm{N}} = \gamma_{2n-\mathrm{N}}$$

によって得られる。

一般解を求めるのにただ一回の求積しか必要がなかったのに，ここでは $2n-\mathrm{N}$ 回の求積にぶつかるということは驚くに当たらない。実際上に示した $2n-\mathrm{N}$ 回の求積を行なうということは，$2n-\mathrm{N}$ 個の任意の媒介変数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{2n-\mathrm{N}}$ を含んだただ一回の求積

$$\int \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 + \cdots + \lambda_{2n-\mathrm{N}}\pi_{2n-\mathrm{N}} = \text{定数}$$

を行なうことだからである。

上の積分法は，不変形式 ω' のみを利用して，形式 ω はそのなかにはいってこない。したがって本質的な役割を演ずるのは，二次の絶対積分不変式 $\int \omega'$ を知っていることと，形式 ω' が一つの完全微分であるという性質とである。

ω' がその微分である形式 ω（またはいくつかの形式 ω）は第二義的な役割しか演じていない。

II Poisson の括弧と Jacobi の恒等式

122. $2n$ を外微分 ω' の階数とし，f および g をその特性系の二つの第一積分とする。二つの微分形式

$$[\omega'^{n-1} df\, dg] \quad \text{および} \quad [\omega'^n]$$

は最大次数 $2n$ の不変形式である。したがってこれらはただ一つの因数で異なるだけである。そしてこの因数は一つの第一積分である。

$$\frac{1}{(n-1)!}[\omega'^{n-1} df\, dg] = \frac{1}{n!}(fg)[\omega'^n],$$

または

$$(fg)[\omega'^n] = n[\omega'^{n-1} df\, dg]$$

とおこう。

このように定義された量 (fg) は **Poisson の括弧**という名をもっている。これは f および g の偏微分の交代双一次形式である。

二つの第一積分の括弧はまた一つの第一積分である。

正準方程式という特別な場合に対して Poisson によって証明されたこの定理は，非常な重要性をもっているが，これは Jacobi によって明らかにされた。

この定理の応用に移るまえに，われわれは二，三の注意をすることができる。

条件 $(fg)=0$ は，ω' の階数が $2n-4$ に等しいことを示している。この場合に，積分 f および g は**対合にある**と言われる。

もしこの条件が満足されていないならば，(fg) を定義する公式は，形式

$$\omega' - \frac{[df\, dg]}{(fg)}$$

が階数 $2n-2$ であることを示している。事実この形式の n 乗は

$$[\omega'^n] - \frac{n}{(fg)}[\omega'^{n-1} df\, dg] = 0$$

である。

さらに，もし ω' をその標準形

$$\omega'=[\omega_1\omega_2]+[\omega_3\omega_4]+\cdots+[\omega_{2n-1}\omega_{2n}]$$

に直して

$$df=f_1\omega_1+f_2\omega_2+\cdots+f_{2n}\omega_{2n},$$

$$dg=g_1\omega_1+g_2\omega_2+\cdots+g_{2n}\omega_{2n}$$

とおけば，

$$(fg)=f_1g_2-f_2g_1+f_3g_4-f_4g_3+\cdots+f_{2n-1}g_{2n}-f_{2n}g_{2n-1}$$

を得ることに注意しよう。

最後に，上にみたところによれば（第118項），つねに ω_i が完全微分であると仮定し得ることに注意しよう。そうすれば簡単な計算によって，Jacobi に負うつぎの恒等式

$$((fg)h)+((gh)f)+((hf)g)=0$$

が与えられる。これは三つの任意の第一積分 f, g, h に対してあてはまる公式である。

しかしながらこの公式の験証は，一次形式 $\omega_1,\cdots,\omega_{2n}$ に対してなんらの仮定をすることなく行なわれ得る。それは恒等式

$$(1)\qquad \frac{1}{(n-1)!}[\omega'^{n-1}((fg)dh+(gh)df+(hf)dg)]=\frac{1}{(n-2)!}[\omega'^{n-2}dfdgdh]$$

に基くものである。これは第68項で証明した恒等式 (8) に他ならない。これを外微分し，右辺の外微分は0であることに注意すれば

$$[\omega'^{n-1}d(fg)dh]+[\omega'^{n-1}d(gh)df]+[\omega'^{n-1}d(hf)dg]=0$$

が得られる。これは Jacobi の恒等式に他ならない。

123. 本章の始めに示した積分法は，Poisson の括弧を利用してのべることができる。

$$Xf=0$$

を，f が一つの第一積分であることを表わす方程式であるとする。まずこの方

程式の一つの特殊解 y_1 をさがす。つぎに方程式系

$$Xf=0,\quad (y_1f)=0$$

の一つの特殊解 y_2 をさがす。つぎに方程式系

$$Xf=0,\quad (y_1f)=0,\quad (y_2f)=0$$

の一つの特殊解 y_3 をさがす。等々と方程式

$$Xf=0,\ (y_1f)=0,\ (y_2f)=0,\ \cdots,\ (y_{n-1}f)=0$$

の一つの特殊解 y_n に達するまでこれを続ける。

不変形式

$$\omega'=\sum_{i=1}^{i=n}[\delta p_i\delta q_i]-[\delta H\delta t]$$

に対応する力学の正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

の場合には，与えられた方程式の第一積分の偏微分方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0$$

である。二つの第一積分の Poisson の括弧 (fg) は，等式

$$n[\omega'^{n-1}\delta f\delta g]=(fg)[\omega'^n]$$

で定義される。この両辺において

$$[\delta p_1\delta q_1\delta p_2\cdots\delta p_n\delta q_n]$$

の項を等しいとおこう。われわれは

$$(fg)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)$$

を得る。

したがって第一積分の満足すべき偏微分方程式は，括弧 (fg) の定義を q_i, p_i, t の任意の二つの関数に拡張して，

$$\frac{\partial f}{\partial t}-(Hf)=0$$

と書かれ得る。

III　既知の第一積分の利用

124. さていまやわれわれは，いくつかの（任意）個数の第一積分 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ を知っていると仮定して，微分形式 ω' の特性方程式の積分の問題をとりあげよう。これらの第一積分を任意定数 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ に等しいとおけば，形式 ω' の階数はある偶数 $2p' \leqq 2p$ に減ずる。したがってこの新しい形式の特性方程式を積分すればよい，またはむしろ対合にある $n-p'$ 個の第一積分を求めればよい。こうしてわれわれは第120項の問題に導かれる。

以上の方法は一般に，既知の積分を最大限に利用してはいない。なぜなら，Poisson-Jacobi の定理によれば，与えられた p 個の積分の二つずつをとって作った括弧は，それ自身積分すべき方程式の第一積分であるからである。したがって括弧 $(y_i y_j)$ を作り，もしこれが新しい第一積分を与えるならば，これらの積分同志，および与えられた積分との間の括弧を作り，この操作がもはや全然新しい積分を与えなくなるまでこれを続ける。これは結局，前もって微分を行なうことによって，括弧 $(y_i y_j)$ は第一積分 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ の関数であるとつねに仮定し得る，ということを意味する。

こんどは，変数が関係

$$y_1=C_1,\quad y_2=C_2,\quad \cdots,\quad y_p=C_p$$

で結ばれていると考えたときに，ω' の階数がいくつ減ずるかを知るためには，関係

$$\delta y_1=0,\quad \delta y_2=0,\quad \cdots,\quad \delta y_p=0$$

で結ばれた変数 $\delta x_1, \cdots, \delta x_{2n+1}$ を用いて作られた外二次形式 ω' に第69項の定理をあてはめればよい。第69項の係数 a_{ij} はここでは括弧 $(y_i y_j)$ であり，二次形式 $\bar{\Phi}$ はここでは

$$\bar{\Phi}=\sum(y_i y_j)[\xi_i \xi_j]$$

である。ω' の階数の減ずる数は，最大数 $2p$ から形式 $\bar{\Phi}$ の階数を引いたものに

等しい。

125. この場合与えられた第一積分を最大限に利用しているということはつぎのようにして理解することができる。

$\bar{\Phi}$ をその標準形

$$\bar{\Phi}=[\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2]+[\bar{\xi}_3\bar{\xi}_4]+\cdots+[\bar{\xi}_{2q-1}\bar{\xi}_{2q}] \qquad (2q\leqq p)$$

に直すように，p 個の変数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ に対して（$y_1, \cdots, y_p$ の関数を係数とする）一つの一次変換を施そう。これは，一次形式 $\delta y_1, \cdots, \delta y_p$ を，$\delta y_1, \cdots, \delta y_p$ に関して $y_1, \cdots, y_p$ の関数を係数とする一次式であって，恒等的に

$$\xi_1\delta y_1+\cdots+\xi_p\delta y_p=\bar{\xi}_1\pi_1+\cdots+\bar{\xi}_p\pi_p$$

が成立するような，新しい微分形式

$$\pi_1,\ \pi_2,\ \cdots,\ \pi_p$$

でおきかえることになる。そうすれば外二次形式 ω' は，$2n-p$ 個の新しい一次形式 $\omega_1, \cdots, \omega_{2n-p}$ を導入すれば

$$\begin{aligned}\omega'=&[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[\pi_{2q+1}\omega_1]+\cdots+[\pi_p\omega_{p-2q}]\\&+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots+[\omega_{2n-p-1}\omega_{2n-p}]\end{aligned}$$

という形をとる。

Π で形式

$$\Pi=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]$$

を示し，π' の外微分が 0 であることを書き表わそう。もし，一次形式

$$\pi_{2q+1},\ \cdots,\ \pi_p;\ \omega_{p-2q+1},\ \cdots,\ \omega_{2n-p}$$

のいずれか一つを含むすべての項を省略すれば，われわれは

$$\Pi'+[\pi_{2q+1}'\omega_1]+\cdots+[\pi_p'\omega_{p-2q}]=0 \tag{2}$$

を得る。

形式 Π は関数 y_i とその微分のみを用いて作られているのであるから，Π' についても同様である。したがって (2) の左辺の種々の項の間に同類項が消し合うということは全然起こり得ない。これからとくに，（形式 $\pi_{2q+1}, \cdots, \pi_p$ が 0

であると仮定すれば）形式

$$\pi_{2q+1}',\quad \cdots,\quad \pi_p'$$

のおのおのは0であることがわかる。したがって Pfaff 系

$$\pi_{2q+1}=\cdots=\pi_p=0$$

は完全積分可能である。これらの方程式の第一積分の一系を

$$\overline{y}_{2q+1},\quad \cdots,\quad \overline{y}_p$$

で表わそう。さらにわれわれは，相変わらず形式 $\pi_{2q+1}, \cdots, \pi_p$ を0とみなせば

$$\Pi'=0$$

を得る。換言すれば，もし $\overline{y}_{2q+1}, \cdots, \overline{y}_p$ を定数とみなせば，形式 Π は完全微分である。したがって形式 Π は（第118項）

$$\Pi=[d\overline{y}_1 d\overline{y}_2]+\cdots+[d\overline{y}_{2q-1} d\overline{y}_{2q}]$$

と直される。

最後に，ω' を

(3)
$$\omega'=[d\overline{y}_1 d\overline{y}_2]+\cdots+[d\overline{y}_{2q-1} d\overline{y}_{2q}]+[d\overline{y}_{2q+1}\omega_1]+\cdots$$
$$+[d\overline{y}_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

という形に書き得ることが容易にみられる。これは結局つぎの定理になる。

条件

$$(\overline{y}_1\overline{y}_2)=\cdots=(\overline{y}_{2q-1}\overline{y}_{2q})=1$$

を満足し，他の括弧 $(\overline{y}_i\overline{y}_j)$ はすべて0であるような，与えられた p 個の第一積分の p 個の関数

$$\overline{y}_1,\quad \overline{y}_2,\quad \cdots,\quad \overline{y}_p$$

を見いだすことができる。

126. この定理が示す固有な興味の他に，さらにその形は，すでに示した積分法が，与えられた積分を最大限に利用しているという，上にのべた事実を明らかにしている。事実 ω' に対して見いだされた形 (3) によれば

$$\omega = dS + \bar{y}_1 d\bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q} + w_1 d\bar{y}_{2q+1} + \cdots$$
$$+ w_{p-2q} d\bar{y}_p + v_1 du_1 + \cdots + v_{n-p+q} du_{n-p+q},$$
$$\omega' = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \cdots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}] + [dw_1 d\bar{y}_{2q+1}] + \cdots$$
$$+ [dw_{p-2q} d\bar{y}_p] + [dv_1 du_1] + \cdots + [dv_{n-p+q} du_{n-p+q}]$$

と書くことができる。

与えられたものを変えない，すなわち ω', y_1, $\cdots$, y_p を不変にする，積分曲線に対する最も一般な変換群は，つぎの方程式で与えられる。

$$\bar{y}_i' = \bar{y}_i \qquad (i=1, 2, \cdots, p),$$
$$v_1' = \frac{\partial V}{\partial u_1'}, \quad \cdots, \quad v'_{n-p+q} = \frac{\partial V}{\partial u'_{n-p+q}},$$
$$v_1 = -\frac{\partial V}{\partial u_1}, \quad \cdots, \quad v_{n-p+q} = -\frac{\partial V}{\partial u_{n-p+q}},$$
$$w_1' = w_1 + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_{2q+1}}, \quad \cdots, \quad w'_{p-2q} = w_{p-2q} + \frac{\partial V}{\partial \bar{y}_p}.$$

ただしここにダッシュをつけた文字は変換された変数を示し，V は変数 u_i, u_i', $\bar{y}_{2q+1}$, $\cdots$, $\bar{y}_p$ の任意の関数を示す。

ω' と p 個の第一積分 y_1, $\cdots$, y_p とから出発して，他の第一積分を変数の選択とは無関係な意味をもった演算で導き得るような手続きはすべて，必然的に ω', y_1, $\cdots$, y_p をかえない最も一般な変換群で不変な一つの第一積分を与える。さてこの群で不変な唯一の関数は，y_1, $\cdots$, y_p の任意関数である。

IV Poisson-Jacobi の定理の拡張

127. もし，二つの第一積分の代わりに，二つの不変一次形式 π_1 と π_2 を知っているとすれば，Poisson-Jacobi の定理は直ちに拡張される。等式

(4) $$n[\omega'^{n-1}\pi_1\pi_2] = \alpha[\omega'^n]$$

で定義される量 α は，明らかに一つの第一積分である。もし π_1 と π_2 が二つの第一積分 y_1, y_2 の微分であれば，これは $(y_1 y_2)$ になる。

この注意を，ω' の特性方程式が二つの無限小変換 A_1f および A_2f を許容すれば

$$\pi_1=\omega'(A_1,\ \delta),\quad \pi_2=\omega'(A_2,\ \delta)$$

が成立するという場合にあてはめよう。

この場合量 α を計算するために，不変形式 $\Omega(\delta)$ を形式 $\Omega(A_1,\ \delta)$ に移す演算を等式 (4) の両辺に施そう。われわれは

$$n(n-1)[\omega'^{n-2}\pi_1\pi_1\pi_2]-n[\omega'^{n-1}\pi_1]\pi_2(A_1)=n\alpha[\omega'^{n-1}\pi_1]$$

を得る。これから，形式 $[\omega'^{n-1}\pi_1]$ は確かに 0 でないから

$$\alpha=-\pi_2(A_1)=\omega'(A_1,\ A_2)=\pi_1(A_2)$$

を得る。

したがって二つの不変形式 $\omega'(A_1,\ \delta)$ および $\omega'(A_2,\ \delta)$ に対してあてはめられた，拡張された Poisson-Jacobi の定理は，二つの無限小変換 A_1f および A_2f に対応する演算を ω' に二度繰り返して施して得られる第一積分 $\omega'(A_1, A_2)$ にわれわれを導く。

第 13 章

絶対一次積分不変式を許容する方程式

I 一 般 積 分 法

128. ω を一つの一次微分形式とする。その双一次共変式 ω' の階数は偶数，たとえば $2n$ である。ここに，方程式 $\omega=0$ が ω' の特性系に属さないか属するかにしたがって二つの場合が起こる。まず第一の場合を調べよう。

I．明らかに

$$\omega'=[\omega_1\omega_2]+[\omega_3\omega_4]+\cdots+[\omega_{2n-1}\omega_{2n}]$$

とおくことができる。ただしここに $2n+1$ 個の形式 $\omega, \omega_1, \cdots, \omega_{2n}$ は独立である。この場合 ω の特性方程式は

$$\omega=\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_{2n}=0$$

である（第78項）。

ω に対する一つの標準形を容易に示すことができる。事実

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 2$$

次の演算を行なえば，順次 ω' の特性方程式の n 個の第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$$

を知ることができる。そしてこれらを任意定数に等しいとおけば，ω' の階数は 0 になる。つぎに一回求積を行なえば ω は

$$\omega=du+z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_ndy_n$$

という形になる。

これが，

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 2,\ 0$$

次の演算によって得られ，一度得られたならば ω の特性方程式の一般解を与えるところの，求める標準形である。

この場合には，ω' の特性方程式の積分と ω の特性方程式の積分とは同値な問題であるのがみられる。そして $\int\omega$ が絶対積分不変式であるという事実は，積分に対しては，$\int\omega$ が相対積分不変式であるという事実以上の重要性をもたない。これは少なくも，ω' の特性方程式の積分に対して第118項で示した方法を用うるかぎり真である。しかしながら第121項の方法を用いる場合には同様にいかない。

II．第二の場合には，$2n$ 個の一次独立な形式 ω, ω_1, $\cdots$, ω_{2n-1} を用いて

$$\omega'=[\omega\omega_1]+[\omega_2\omega_3]+\cdots+[\omega_{2n-2}\omega_{2n-1}]$$

とおくことができる。方程式 $\omega=0$ の他に，微分は関係 $\omega=0$ で結ばれていると考えた場合の形式 ω' の随伴系の方程式を書いて得られる方程式

$$\omega=0,\quad \omega_2=\omega_3=\cdots=\omega_{2n-1}=0$$

は一つの固有な意味をもっている。これは二つの形式 ω および $[\omega\omega']$ の随伴系である。したがってこれは Pfaff の方程式 $\omega=0$ の特性系である（第163項)。われわれはこれを系 (Σ) とよび，さらに方程式 $\omega_1=0$ を含んだ，ω の特性系を (S) で示そう。

$2n-1$ 次の演算によって，系 (Σ) の一つの第一積分 y_1 を得ることができる。これを一つの任意定数に等しいとおけば，新しい形式 ω の系 (Σ)，すなわち新しい方程式 $\omega=0$ の特性系は，その方程式の数を二つだけ減ずる。したがって

$$2n-3,\ \cdots,\ 3$$

次の演算によって，それらを新しい任意定数に等しいとおけば，ω に対応する新しい系 (Σ) はもはやただ一つの方程式（これは明らかに $\omega=0$ であるが）しか含まないというような新しい積分

$$y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_{n-1}$$

を見いだすことができる。これは，この方程式が完全積分可能であり，さら

に一次の新しい演算を行なえば，ω を

$$\omega=z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_ndy_n$$

と書くことを許す新しい第一積分 y_n を与えることを意味する。

こうしてわれわれは，最小個数 $2n$ 個の変数が実際にはいってくる ω の標準形を得る。ここに $2n$ は，ω の特性系 (S) の方程式の数，すなわち ω のクラスである。

特性変数 y_i および z_i に対して施された最も一般な変換であって，形式 ω を不変にするものが容易に見いだされる。等式

$$z_1'dy_1'+\cdots+z_n'dy_n'=z_1dy_1+\cdots+z_ndy_n$$

は，最も一般な場合だけを考えれば

$$V(y_1',\ \cdots,\ y_n',\ y_1,\ \cdots,\ y_n)=0,$$

$$\frac{z_1'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_1'}}=\frac{z_2'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_2'}}=\cdots=\frac{z_n'}{\dfrac{\partial V}{\partial y_n'}}=\frac{-z_1}{\dfrac{\partial V}{\partial y_1}}=\cdots=\frac{-z_n}{\dfrac{\partial V}{\partial z_n}}$$

を与える。これらの公式は，確かに変数 $y_1,\ \cdots,\ y_n,\ \dfrac{z_2}{z_1},\ \cdots,\ \dfrac{z_n}{z_1}$ が互いに変換されることを示している。これらは，それを用いれば方程式が $\omega=0$ と書かれ得る最小個数の変数である。これらはこの方程式の特性系 (Σ) の第一積分である。

もし y_i と y_i' の間に p 個の独立な関係式

$$V_1=0,\ \ V_2=0,\ \ \cdots,\ \ V_p=0$$

が存在すれば，変換を定義する公式は，p 個の補助未知数 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_p$ を用いて

$$z_i'=\lambda_1\frac{\partial V_1}{\partial y_i'}+\lambda_2\frac{\partial V_2}{\partial y_i'}+\cdots+\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial y_i'},$$

$$-z_i=\lambda_1\frac{\partial V_1}{\partial y_i}+\lambda_2\frac{\partial V_2}{\partial y_i}+\cdots+\lambda_p\frac{\partial V_p}{\partial y_i}$$

となる。

129. ω の特性系が奇数 $(2n+1)$ または偶数 $2n$ である二つの場合の差を，積分の見地から注意しよう。前者の場合には，積分は

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 2,\ 0$$

次の演算を必要とする。後者の場合には積分は

$$2n-1,\ 2n-3,\ \cdots,\ 3,\ 1$$

次の演算を必要とする。

さらにこれら二つの場合は，実際にはつぎのように互いに区別されることに注意しよう。$2n$ を ω' の階数，すなわち，n を形式 $[\omega'^n]$ が 0 にならないような最大のベキとしよう。第一の場合に $[\omega\omega'^n]$ は 0 でないが，第二の場合には $[\omega\omega'^n]$ は 0 である。

II Poisson-Jacobi の公式の拡張

130. I. 形式 ω は第一の型に属すると仮定しよう。f をその特性系の任意の第一積分とする。形式 $[\omega'^n df]$ は不変であって，最大次数 $2n+1$ である。したがって

$$[\omega'^n df]=\{f\}[\omega\omega'^n]$$

とおくことができる。ここに $\{f\}$ は，関数 f の第一次偏微分に関して線型であって微分を含まぬ量である。この量 $\{f\}$ は，一つの定数であるか，または ω の特性方程式の一つの第一積分である。

こんどは f および g を ω の特性方程式の二つの第一積分としよう。量 (fg) を関係

$$n[\omega\omega'^{n-1}dfdg]=(fg)[\omega\omega'^n]$$

で定義することができる。この量 (fg) はやはり一つの定数であるか，または一つの第一積分である。

もし形式 ω が

$$\omega=du+z_1dy_1+\cdots+z_ndy_n$$

と直されていれば，われわれは

$$\{f\}=\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$(fg)=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial f}{\partial z_i}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i}-z_i\frac{\partial g}{\partial u}\right)-\frac{\partial g}{\partial z_i}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}-z_i\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

を得る。これから容易に重要な恒等式

$$\{(fg)\}=(\{f\}g)+(f\{g\}),$$

$$((fg)h)+((gh)f))+((hf)g)=(fg)\{h\}+(gh)\{f\}+(hf)\{g\}$$

が得られる。

131. これらの恒等式を直接証明するために，形式 $df-\{f\}\omega$ は，それを用いれば ω' を表わし得るような $2n$ 個の一次独立な形式の一次結合であることに注意しよう。なぜなら

$$[\omega'^n(df-\{f\}\omega)]=0$$

であるからである。これから直ちに

$$n[\omega'^{n-1}(df-\{f\}\omega)(dg-\{g\}\omega)]=\lambda[\omega'^n]$$

の形の恒等式が導かれる。つぎに ω との外積を作れば $\lambda=(fg)$ が得られる。したがって

(1)　$$n[\omega'^{n-1}dfdg]-n\{f\}[\omega\omega'^{n-1}dg]+n\{g\}[\omega\omega'^{n-1}df]=(fg)[\omega'^n]$$

が得られる。

つぎに三つの一次形式 $df-\{f\}\omega$, $dg-\{g\}\omega$, $dh-\{h\}\omega$ に対して施された，第68項の恒等式 (8) は

$$(fg)[\omega'^{n-1}(dh-\{h\}\omega)]+(gh)[\omega'^{n-1}(df-\{f\}\omega)]+(hf)[\omega'^{n-1}(dg-\{g\}\omega)]$$
$$=(n-1)[\omega'^{n-2}(df-\{f\}\omega)(dg-\{g\}\omega)(dh-\{h\}\omega)]$$

を与える。これから ω をかけて

(2)　$$[\omega\omega'^{n-1}((fg)dh+(gh)df+(hf)dg)]=(n-1)[\omega\omega'^{n-2}dfdgdh]$$

が導かれる。

さて恒等式 (1) の外微分は，

$$n[\omega\omega'^{n-1}d\{f\}dg]+n[\omega\omega'^{n-1}dfd\{g\}]=[\omega'^{n}d(fg)],$$

すなわち証明すべき第一の恒等式

$$(\{f\}g)+(f\{g\})=\{(fg)\}$$

を与える。つぎに恒等式 (2) の外微分は

$$[\omega'^{n}((fg)dh+(gh)df+(hf)dg)]-[\omega\omega'^{n-1}d(fg)dh]-[\omega\omega'^{n-1}d(gh)df]$$
$$-[\omega\omega'^{n-1}d(hf)dg]=(n-1)[\omega'^{n-1}dfdgdh]$$

を与える。しかしながら他方 (1) へ dh を外的にかければ

$$n[\omega'^{n-1}dfdgdh]-n\{f\}[\omega\omega'^{n-1}dgdh]+n\{g\}[\omega\omega'^{n-1}dfdh]=(fg)[\omega'^{n}dh]$$

が得られる。この最後の公式から

$$n[\omega'^{n-1}dfdgdh]=[\{f\}(gh)+\{g\}(hf)+\{h\}(fg)][\omega\omega'^{n}]$$

が得られ，前の恒等式から証明すべき恒等式

$$(fg)\{h\}+(gh)\{f\}+(hf)\{g\}=((fg)h)+((gh)f)+((hf)g)$$

が得られる。

132. こんどは形式 ω が第二の型に属すると仮定しよう。ω の特性系の二つの第一積分 f および g が与えられた場合に，量 $\{f\}$ および (fg) を同様に公式

$$n[\omega\omega'^{n-1}df]=\{f\}[\omega'^{n}],$$
$$n[\omega'^{n-1}dfdg]=(fg)[\omega'^{n}]$$

で定義する。

もし ω が

$$\omega=z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_ndy_n$$

の形に直されていれば，われわれは

$$\{f\}=-\left(z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+\cdots+z_n\frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$

$$(fg)=\sum\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial g}{\partial y_i}-\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial z_i}\right)$$

を得る。

そうすれば公式

(3) $$\{(fg)\}=(fg)+(\{f\}g)+(f\{g\}),$$

(4) $$((fg)h)+((gh)f)+((hf)g)=0$$

が容易に験証される。この第二の公式は，f, g, h が ω' の特性方程式の第一積分なのであるから，Jacobi の恒等式に他ならない。

第一の恒等式を直接証明するために，第68項の恒等式 (8) を三つの一次形式 ω, df, dg にあてはめよう。関係

$$n[\omega'^{n-1}\omega df]=\{f\}[\omega'^{n}]$$

$$n[\omega'^{n-1}dfdg]=(fg)[\omega'^{n}]$$

$$n[\omega'^{n-1}dg\omega]=-\{g\}[\omega'^{n}]$$

から，恒等式

$$[\omega'^{n-1}(\{f\}dg+(fg)\omega-\{g\}df)]=(n-1)[\omega'^{n-2}\omega dfdg]$$

が導かれるが，これを外微分すれば

$$[\omega'^{n-1}d\{f\}dg]+[\omega'^{n-1}dfd\{g\}]+(fg)[\omega'^{n}]-[\omega\omega'^{n-1}d(fg)]$$
$$=(n-1)[\omega'^{n-1}dfdg]$$

が与えられる。この各項をその値でおきかえて簡単にすれば，証明すべき恒等式が得られる。

III　既知の第一積分の利用

133. 形式 ω は第一の型に属し，その特性方程式の p 個の独立な第一積分 $y_1, \cdots, y_p$ を知っていると仮定しよう。量 $\{y_i\}$，$(y_i y_j)$ を作ろう。もしこれらが新しい積分を導入すれば，われわれはこれらを与えられたものに付け加える。そしてふたたび演算を行なって，ついに新しい積分は全然得られなくなるまでこれを続ける。したがってわれわれは，この最初の結果は得られた，すなわち量 $\{y_i\}=a_i$，$(y_iy_j)=a_{ij}$ は $y_1, \cdots, y_p$ の関数であると仮定することができる。

いまもし補助変数 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ を導入すれば，二つの形式，一つは一次で

$$\varphi=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_p\xi_p,$$

他方は二次で

$$\Phi=\sum a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

を得る。第一式は，f が偏微分として $\xi_1, \cdots, \xi_p$ を許容する，$y_1, \cdots, y_p$ の任意の関数である場合の量 $\{f\}$ の値を示している。第二式は，またむしろこれに対応する交代双一次形式

$$\sum a_{ij}\xi_i\eta_j$$

は，括弧 (fg) の値を示している。

さてわれわれは，変数 ξ_i に対する適当な一次変換によって，上の二つの形式を標準形に直そう。

三つの場合が可能である。形式 Φ が

$$\Phi=[\xi_1'\xi_2']+\cdots[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

に直されているとして，

a)　　$$\varphi=0,$$

b)　　$$\varphi=\xi_1',$$

c)　　$$\varphi=\xi_{2q+1}'$$

が起こり得る。

係数が y_i の関数である一次変換を δy_i に施せば，恒等式

$$\xi_1'\pi_1+\xi_2'\pi_2+\cdots+\xi_p'\pi_p=\xi_1\delta y_1+\xi_2\delta y_2+\cdots+\xi_p\delta y_p$$

を満足する p 個の微分形式 $\pi_1, \cdots, \pi_p$ が得られる。

さて a) の場合には，

$$n[\omega\omega'^{n-1}\pi_1\pi_2]=\cdots=n[\omega\omega'^{n-1}\pi_{2q-1}\pi_{2q}]=[\omega\omega'^n]$$

を除くすべての形式

$$[\omega'^n\pi_i],\quad [\omega\omega'^{n-1}\pi_i\pi_j]$$

は0である。これから容易に

$$\omega'=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[\pi_{2q+1}\omega_1]+\cdots$$
$$+[\pi_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

が導かれる。

y_i を任意定数に等しいとおけば，形式 ω はなお第一の型であり，ω' の階数は $2p-2q$ だけ減ずる。与えられた第一積分は ω' の特性系の積分であるから，この場合は前章で研究した場合と同一である。

b）の場合には，

$$[\omega'^n(\pi_1-\omega)]=[\omega'^n\pi_2]=\cdots=[\omega'^n\pi_p]=0$$

を得る。したがって ω' は

$$\omega'=[(\pi_1-\omega)\pi_2]+[\pi_3\pi_4]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]$$
$$+[\pi_{2q+1}\omega_1]+\cdots+[\pi_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

という形に直し得る。

y_i を任意定数に等しいとおけば，形式 ω はなお第一の型であり，ω' の階数は $2p-2q$ だけ減ずる。

c）の場合には

$$[\omega'^n\pi_1]=\cdots=[\omega'^n\pi_{2q}]=[\omega'^n(\pi_{2q+1}-\omega)]=\cdots=[\omega'^n\pi_p]=0$$

を得る。そして形式 ω' は

$$\omega'=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[(\pi_{2q+1}-\omega)\omega_1]+\cdots$$
$$+[\pi_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

に直され得る。

y_i を任意定数に等しいとおけば，形式 ω は第二の型となり，ω' の階数は $2p-2q-2$ だけ減ずる。新しい方程式 $\omega=0$ の特性系は，$2n-2p+2q+1$ 個の方程式からできている。この場合積分は

$$2n-2p+2q+1,\ \cdots,\ 3,\ 1$$

次の演算を必要とする。ところが他方 a）および b）の場合には，積分は

$$2n-2p+2q,\ \cdots,\ 2,\ 0$$

次の演算を要求する。

結局形式 ω は，もし外積 $[\varphi\Phi]$ が 0 なら第一の型のままであり，反対の場合には第二の型となる。

134. こんどは形式 ω が第二の型であると考えよう。ここでもなお二つの形式

$$\varphi=a_1\xi_1+\cdots+a_p\xi_p,$$

$$\Phi=\sum a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

を得る。

係数 a_{ij} は方程式

$$n[\omega'^{n-1}dy_idy_j]=a_{ij}[\omega'^n]$$

で与えられるのであるから，積分 y_i を任意定数に等しいとおいた場合の ω' の階数は，もし $2q$ を形式 Φ の階数とすれば，$2p-2q$ だけ減ずる。

形式 Φ はその標準形

$$\Phi=[\xi_1'\xi_2']+[\xi_3'\xi_4']+\cdots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

に直されたとすれば，同時に φ に対してつぎの三つの形のいずれか一つを仮定することができる。

a)　　$\varphi=0,$

b)　　$\varphi=\xi_1',$

c)　　$\varphi=\xi_{2q+1}'.$

a）の場合は，恒等式 (3) によれば，すべての括弧 (y_iy_j) が 0，すなわち形式 Φ が恒等的に 0 であることを要求する。したがって $q=0$ を得る。この場合には明らかに

$$\omega'=[\omega\omega_1]+[\pi_1\omega_2]+\cdots+[\pi_p\omega_{p+1}]+[\omega_{p+2}\omega_{p+3}]+\cdots$$

を得る。

形式 ω は第二の型のままであり，数 n は p だけ減ずる。

b）の場合には

$$n[\omega'^{n-1}\omega\pi_1]=n[\omega'^{n-1}\pi_1\pi_2]=\cdots=n[\omega'^{n-1}\pi_{2q-1}\pi_{2q}]=[\omega'^n]$$

を得る。そして ω' は

$$\omega'=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[(\omega+\pi_2)\omega_1]+[\pi_{2q+1}\omega_2]+\cdots$$
$$+[\pi_p\omega_{p-2q+1}]+[\omega_{p-2q+2}\omega_{p-2q+3}]+\cdots$$

という形に直し得られる。

y_i を任意定数に等しいとおけば，形式 ω は第二の型のままであり，ω' の階数は $2p-2q$ だけ減少する。

結局形式 ω は，もし積 $[\varphi\Phi]$ が 0 なら第二の型のままであり，反対の場合には第一の型となる。

135. 結局われわれは，a) という二つの場合を除けば，本質的に異なる四つの簡約化された問題を得る。その一つはすでに前章において取り扱ったものであり，他は方程式 $\omega=0$ の特性系の，対合にある p 個の第一積分を知っていることに相当する。

われわれはこれら四つの簡約された問題をさらに詳細に調べ，既知の第一積分を最大限に利用しているかどうかを考えてみることができる。この問に答える方法は，前章において用いたそれと同じものである。これは ω を，適当に選ばれた $y_1, \cdots, y_p$ の p 個の関数と，他の独立な第一積分とを含む標準形に直すことに基くものである。この標準形が得られればこれから，積分曲線に施されて，与えられたものをかえない最大の変換群の方程式が導かれる。

四つの場合のおのおのにおける ω および ω' の標準形を簡単に示そう。これに達するための計算は，前章におけると同様に行なわれる（第125項）。

1° 形式 ω は第一の型であり，形式 φ と Φ とは

$$\varphi=\xi_1', \quad \Phi=[\xi_1'\xi_2']+\cdots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

に直し得られる。

この場合には

$$\omega'=[(\pi_1-\omega)\pi_2]+[\pi_3\pi_4]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]$$
$$+[\pi_{2q+1}\omega_1]+\cdots+[\pi_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

を得る。

$$\Pi=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]$$

とおき，ω' を外微分して

$$\pi_{2q+1}, \quad \cdots, \quad \pi_p, \quad \omega_{p-2q+1}, \quad \cdots, \quad \omega_{2n-p}$$

に関する項を省略すれば，恒等式

$$\Pi'-[\Pi\pi_2]+[\omega\pi_2']+[\pi_{2q+1}'\omega_1]+\cdots+[\pi_p'\omega_{p-2q}]=0$$

を得る。

さて

$$\pi_2=\frac{d\bar{y}_2}{\bar{y}_2},\quad \pi_{2q+1}=d\bar{y}_{2q+1},\quad \cdots,\quad \pi_p=d\bar{y}_p$$

とおくことができる。つぎに形式 $\frac{1}{\bar{y}_2}\Pi$ の外微分は 0 であるから

$$\Pi=\bar{y}_2([d\bar{y}_1d\bar{y}_2]+\cdots+[d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}])$$

とおくことができる。

最後にわれわれは

$$\omega'=\left[\frac{d\bar{y}_2}{\bar{y}_2}\omega\right]+\bar{y}_2[d\bar{y}_1d\bar{y}_2]+\cdots+\bar{y}_2[d\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}]$$
$$+[d\bar{y}_{2q+1}\omega_1]+\cdots+[d\bar{y}_p\omega_{p-2q}]+\cdots$$

を得る。

$$\bar{\omega}=\frac{1}{\bar{y}_2}\omega-\bar{y}_1d\bar{y}_2-\cdots-\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}$$

とおけば，この結果をさらに直観的な形におくことができる。事実こうおけば

$$\bar{\omega}'=[d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_1]+\cdots+[d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q}]+[\bar{\omega}_{p-2q+1}\bar{\omega}_{p-2q+2}]+\cdots+[\bar{\omega}_{2n-p-1}\bar{\omega}_{2n-p}]$$

が得られる。

この形においては，既知の積分を最大限に利用したということが明らかにみられる。

さらにわれわれは標準関係式

$$\{\bar{y}_1\}=1,\quad \{\bar{y}_i\}=0,\qquad (i=2,\ \cdots,\ p)$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2)=(\bar{y}_3\bar{y}_4)=\cdots=(\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q})=\bar{y}_2$$

を得た。ここに他の括弧は全部 0 である。

2°　形式 ω は第一の型に属し，形式 φ と Φ は

$$\varphi=\xi_{2q+1}',\quad \Phi=[\xi_1'\xi_2']+\cdots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

と直し得る。

この場合には

$$\omega'=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[(\pi_{2q+1}-\omega)\omega_1]+\cdots$$
$$+[\pi_p\omega_{p-2q}]+[\omega_{p-2q+1}\omega_{p-2q+2}]+\cdots$$

を得る。

右辺を外微分すれば，

$$\pi_{2q+2}=d\overline{y}_{2q+2},\quad\cdots,\quad \pi_p=d\overline{y}_p,$$
$$\pi_{2q+1}=d\overline{y}_{2q+1}+\overline{y}_1d\overline{y}_2+\cdots+\overline{y}_{2q-1}d\overline{y}_{2q},$$
$$\Pi=[d\overline{y}_1d\overline{y}_2]+[d\overline{y}_3d\overline{y}_4]+\cdots+[d\overline{y}_{2q-1}d\overline{y}_{2q}]$$

とおき得ることが容易に示される。

$$\bar{\omega}=-\omega+d\overline{y}_{2q+1}+\overline{y}_1d\overline{y}_2+\cdots+\overline{y}_{2q-1}d\overline{y}_{2q}$$

とおけば，

$$\bar{\omega}'=[\bar{\omega}\bar{\omega}_1]+[d\overline{y}_{2q+2}\bar{\omega}_2]+\cdots+[d\overline{y}_p\bar{\omega}_{p-2q}]+[\bar{\omega}_{p-2q+1}\bar{\omega}_{p-2q+2}]+\cdots$$

を得る。これは，既知の第一積分を最大限に利用しているということを明らかにする公式である。

さらにわれわれは標準関係式

$$\{\overline{y}_{2q+1}\}=1,$$
$$(\overline{y}_1\overline{y}_2)=\cdots=(\overline{y}_{2q-1}\overline{y}_{2q})=1,$$
$$(\overline{y}_1\overline{y}_{2q+1})=-\overline{y}_1,\quad(\overline{y}_3\overline{y}_{2q+1})=-\overline{y}_3,\quad\cdots,\quad(\overline{y}_{2q-1}\overline{y}_{2q+1})=-\overline{y}_{2q-1}$$

を得た。ここに他の量 $\{\overline{y}_i\}$，$(\overline{y}_i\overline{y}_j)$ はすべて 0 である。

3°　形式 ω は第二の型に属し，形式 φ と Φ は

$$\varphi=\xi_1',\quad \Phi=[\xi_1'\xi_2']+\cdots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

と直し得る。

この場合には

$$\omega'=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]+[(\omega+\pi_2)\omega_1]$$
$$+[\pi_{2q+1}\omega_2]+\cdots+[\pi_p\omega_{p-2q+1}]+\cdots$$

を得る。

やはり

$$\Pi=[\pi_1\pi_2]+\cdots+[\pi_{2q-1}\pi_{2q}]$$

とおいて，ω' を外微分し

$$\omega+\pi_2,\quad \pi_{2q+1},\quad \cdots,\quad \pi_p,\quad \omega_{p-2q+2},\quad \cdots$$

の項を省略しよう。われわれは

$$\Pi'+[\Pi\omega_1]+[\pi_2'\omega_1]+[\pi_{2q+1}'\omega_2]+\cdots+[\pi_p'\omega_{p-2q+1}]=0$$

を得る。

この恒等式によれば，

$$\pi_{2q+1}=d\bar{y}_{2q+1},\quad \cdots,\quad \pi_p=d\bar{y}_p$$

とおくことができる。つぎに，$\bar{y}_{2q+1}, \cdots, \bar{y}_p$ を定数とみなせば，π_2' は階数 $2q$ の $-\Pi$ に等しいのがみられる。ここに方程式 $\pi_2=0$ は π_2' の随伴系に属する。したがって

$$\pi_2=-(\bar{y}_1d\bar{y}_2+\cdots+\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q})$$

とおくことができる。

最後に

$$\bar{\omega}=\omega+\pi_2=\omega-\bar{y}_1d\bar{y}_2-\cdots-\bar{y}_{2q-1}d\bar{y}_{2q}$$

とおいて

$$\bar{\omega}'=[\bar{\omega}\bar{\omega}_1]+[d\bar{y}_{2q+1}\bar{\omega}_2]+\cdots+[d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q+1}]+\cdots$$

を得る。

既知の積分が最大限に利用されているがみられる。そしてわれわれはさらに標準関係式

$$\{\bar{y}_1\}=-\bar{y}_1,\quad \{\bar{y}_3\}=-\bar{y}_3,\quad \cdots,\quad \{\bar{y}_{2q-1}\}=-\bar{y}_{2q-1},$$
$$(\bar{y}_1\bar{y}_2)=(\bar{y}_3\bar{y}_4)=\cdots=(\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q})=1$$

に達する。ここに他のすべての量 $\{\bar{y}_i\}$, $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ は 0 である。

4°　形式 ω は第二の型に属し，形式 φ と Φ は

$$\varphi=\xi_{2q+1}',\quad \Phi=[\xi_1'\xi_2']+\cdots+[\xi_{2q-1}'\xi_{2q}']$$

と直される。

この場合われわれは

$$\omega' = [\pi_1\pi_2] + \cdots + [\pi_{2q-1}\pi_{2q}] + [\omega\pi_{2q+1}] + [\pi_{2q+2}\omega_1] + \cdots + [\pi_p\omega_{p-2q-1}] + \cdots$$

を得る。

文字 Π に対して上と同様な意味を与えるならば,

$$\pi_{2q+2},\ \cdots,\ \pi_p,\ \omega_{p-2q},\ \cdots,\ \omega_{2n-1-p}$$

に関する項を省略してわれわれは恒等式

$$\Pi' + [\Pi\pi_{2p+1}] - [\omega\pi_{2q+1}'] + [\pi_{2q+2}'\omega_1] + \cdots + [\pi_p'\omega_{p-2q-1}] = 0$$

を得る。

外微分 π_{2q+1}', π_{2p+2}', $\cdots$, π_p' は π_{2q+1}, $\cdots$, π_p とともに 0 となる。したがって

$$\pi_{2q+1} = \frac{d\bar{y}_{2q+1}}{\bar{y}_{2q+1}},\quad \pi_{2q+2} = d\bar{y}_{2q+2},\quad \cdots,\quad \pi_p = d\bar{y}_p$$

とおくことができる。したがって形式 $\bar{y}_{2p+1}\Pi$ の外微分は, $\bar{y}_{2q+2}$, $\cdots$, $\bar{y}_p$ を定数とみなせば 0 となる。したがって

$$\bar{y}_{2q+1}\Pi = [d\bar{y}_1 d\bar{y}_2] + \cdots + [d\bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}]$$

とおくことができる。

最後に

$$\bar{\omega} = \bar{y}_{2q+1}\omega - \bar{y}_1 d\bar{y}_2 - \cdots - \bar{y}_{2q-1} d\bar{y}_{2q}$$

とおいて

$$\bar{\omega}' = [d\bar{y}_{2q+2}\bar{\omega}_1] + \cdots + [d\bar{y}_p\bar{\omega}_{p-2q-1}] + \cdots$$

を得る。

既知の第一積分が最大限に利用されていることが明らかにみられる。われわれはさらに標準関係式

$$\{\bar{y}_{2q+1}\} = \bar{y}_{2q+1},$$

$$(\bar{y}_1\bar{y}_2) = (\bar{y}_3\bar{y}_4) = \cdots = (\bar{y}_{2q-1}\bar{y}_{2q}) = \bar{y}_{2q+1}$$

を得た。他の量 $\{\bar{y}_i\}$, $(\bar{y}_i\bar{y}_j)$ は全部 0 である。

第 14 章

一つの不変 Pfaff 方程式を許容する微分方程式

I　一般積分法

136. われわれはすでに，Pfaff の方程式

(1)
$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n = 0$$

の特性系に出会った（第104項）。それは方程式

(2)
$$\omega = 0, \quad \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_1)}}{a_1} = \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_2)}}{a_2} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial \omega'}{\partial (dx_r)}}{a_r}$$

から成っている。この後の $r-1$ 個の方程式は，変数が関係 $\omega=0$ で結ばれていると考えたときの外二次形式 ω' の随伴系を与えている。

われわれはこの特性系にも，第二の型の Pfaff の式 ω が問題になったおり（第128項），前章で出会った。

特性系 (2) の独立な方程式の数はつねに奇数である。事実関係 (2) を考えに入れれば，ω' を

$$\omega' = [\omega_1 \omega_2] + \cdots + [\omega_{2n-1} \omega_{2n}] \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega)$$

の形におくことができる。ただしここに ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_{2n} は，互いに独立でしかも ω とも独立な一次微分形式を示している。この場合方程式 (1) の特性系は，方程式

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_{2n} = 0$$

で定義される。整数 n は，ここにみられるように，形式 $[\omega\omega'^{n}]$ が 0 にならないような最大の整数である。方程式 $\omega=0$ のクラスは，この形式の次数に等しい。

137. 方程式 (1) に対する標準形をふたたび見いだすことは容易である。事実 y_1 を特性系 (2) の一つの任意の第一積分とする。もし y_1 を任意定数 C_1 に等しいとおいて dy_1 を 0 とすれば，新しい方程式 (1) の特性系の階数は少なくも 1 だけ減ずる。ところがこの階数は偶数であるから，この階数は少なくとも 2 だけ減ずる。y_2 を新しい特性系の一つの第一積分とする。

$$y_1=C_1,\quad y_2=C_2;\quad dy_1=0,\quad dy_2=0$$

とおけば，与えられた方程式の特性系の階数は少なくも 4 だけ減ずる。等々。最後に，高々 $n+1$ 回の演算で，方程式 $\omega=0$ は恒等的に満足されるようになる。言いかえると，この方程式は

$$z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_qdy_q+dy_{q+1}=0 \qquad (q\leqq n)$$

の形である。

なお整数 q は n に等しい。もしそうでないとすれば，方程式 (1) は $2n+1$ 以下の個数の変数で書き表わされることになるからである。

したがって，もし方程式 (1) の特性系が階数 $2n+1$ であれば，この方程式は

$$dy_{n+1}+z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_ndy_n=0$$

の形に直される。そして量

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{n+1};\quad z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$$

は，特性方程式の独立な第一積分の一組を作る。

この方法によれば，方程式 (1) のその標準形への変形，したがってその特性系の積分は，順次

$$2n+1,\ 2n-1,\ \cdots,\ 3,\ 1$$

次の演算と微分とを必要とするのがみられる。

138. 第12章 (第120項) におけると同様，これらの積分を任意定数に等しいとおけば方程式 (1) が恒等的に満足されるような $N\geqq n+1$ 個の第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_N$$

を知れば，特性方程式の積分を微分で完了することができるのに注意すること

ができる。実際方程式 (1) は，ひととおり，そしてただひととおりの仕方で

$$dy_N+z_1dy_1+z_2dy_2+\cdots+z_{N-1}dy_{N-1}=0$$

という形におくことができる。そして $z_1, \cdots, z_{N-1}$ はやはり特性方程式の第一積分であることを証明することができる。

さらに一般に，この独立な第一積分をある個数 r だけ知っているときに，特性系の積分がいかなる問題に帰着するかを調べようとすることもできる。

139. 対合にある第一積分。もし

$$[\omega\omega'^{n-1}dfdg]=0 \tag{3}$$

が成立するならば，方程式 (1) の特性系の二つの第一積分 f および g は対合にあると言おう。この定義は明らかに，変数の選択にも，方程式 (1) の左辺にかけることのできる任意因数にも関係しない。

二つの第一積分が対合にあるという性質から，つぎの重要な結論が導かれる。すなわち，変数が二つの関係

$$f=\mathrm{C},\quad g=\mathrm{C}'$$

で結ばれていると仮定すれば，この特性系の階数は4だけ減ずる。ただしここに C および C′ は二つの任意定数である。実際条件 (3) は，$\omega=0$ とともに $df=dg=0$ と仮定すれば，ω' の階数は $2n-2$ より小，したがって $2n-4$ に等しいことを示している。

II　既知の積分の利用

140. 二つずつ互いに対合にある p 個の独立な第一積分 $y_1, \cdots, y_p$ を知っている場合。この場合には第6章（第67項）でのべたことから，ω' の階数は，微分が関係

$$\omega=0,\ dy_1=0,\ \cdots,\ dy_p=0$$

で結ばれていると仮定すれば，$2n-2p$ に減ずることがわかる。したがって変数

が関係

$$y_1=C_1,\ \ y_2=C_2,\ \ \cdots,\ \ y_p=C_p$$

で結ばれていると仮定した場合の方程式（1）の特性系は，階数 $2n-2p+1$ であり，したがってその積分には

$$2n-2p+1,\ \ 2n-2p-1,\ \ \cdots,\ \ 3,\ \ 1$$

次の演算と微分とが必要である。

上に調べた場合は，特性系の階数が最大数 $2p$ だけ一度に減ずる場合である。

141. 与えられた第一積分が二つずつ全部は対合にない場合。

この場合には，与えられた第一積分を任意定数に等しいとおいた場合の特性系の階数の減少は，その最大限 $2p$ に達しない。その代わり，特性方程式に対する一つの一次絶対積分不変式を定めることができる。ある場合にはこれは，一見最も都合がよいと思われる第一の場合のそれよりもはるかに大きな，積分の問題の簡単化を与えることがある。

実際 y_1 と y_2 を，特性方程式の互いに対合にない二つの第一積分としよう。われわれは

$$n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2]=A[\omega\omega'^n]$$

を得る。ただしここに係数 A は 0 でない。

$$\pi=m\omega$$

が一つの不変形式であるような，すなわちこれが特性方程式の第一積分とその微分とで表わされ得るような，無限に多くの（未知）関数 m が存在する。このような形式に対しては

$$\pi'=m\omega'+[dm\omega],$$

したがって

$$[\pi\pi'^{n-1}dy_1dy_2]=m^n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2],$$

$$[\pi\pi'^n]=m^{n+1}[\omega\omega'^n]$$

を得る。したがって比較によって

$$n[\pi\pi'^{n-1}dy_1dy_2]=\frac{A}{m}[\pi\pi'^{n}]$$

を得る。

括弧内の二つの形式は明らかに不変形式である。したがって $\frac{A}{m}$ は一つの第一積分である。したがって

$$\frac{A}{m}\pi=A\omega$$

は一つの不変形式である。これはわれわれが望んでいた結果である。

等式

$$n[\omega\omega'^{n-1}dy_1dy_2]=A[\omega\omega'^{n}]$$

で定義される関数 A が 0 でないような二つの第一積分 y_1 および y_2 を知っていれば，一次形式 $A\omega$ は一つの絶対不変形式である。

さらに，形式 $A\omega$ を表わし得る最小数の変数は，与えられた特性方程式の $2n+1$ 個の第一積分であることに注意しよう。したがって形式 $A\omega$ の特性系は方程式 (1) のそれと一致し，したがって階数は偶数である。形式 $A\omega$ は第一の型に属する。

142. 以上の定理はこれを一つの積分の方法に結びつけることができる。これは非常に大きく拡張することができるが，それは u を一つの補助変数として，形式 $u\omega$ の特性方程式を積分するという方法である。事実これらの方程式のすべての解に，方程式 $\omega=0$ の特性方程式の一つの解，すなわち，解を定義する関係から補助変数 u を消去して得られる解が対応する。

形式 $u\omega$ は明らかに第二の型であり，第128項で説明したその特性方程式の一般的な積分法は，$\omega=0$ の特性系に対して第137項で想起した積分法と同一である。したがってもし積分に対して先験的には何も知らない場合には，方程式 $\omega=0$ の考察を形式 $u\omega$ の考察でおきかえてもなんらの利益も得られない。しかしながらもし先験的に特性方程式の第一積分を知っている場合には，その利益は明らかである。なぜならこの場合には形式 $u\omega$ の特性方程式の積分に，第

134項でのべた利用法を適用することができるからである。とくに方程式 $\omega=0$ の特性方程式の二つの第一積分 y_1 および y_2 を知っている場合には，われわれは

$$\{y_1\}=0, \quad \{y_2\}=0$$

を得る。したがって

$$(n+1)[(u\omega)'^{n}dy_1dy_2]=(y_1y_2)(u\omega)'^{n+1}$$

で定義される括弧 (y_1y_2) の計算は（第132項），これを展開して du を含む項を等置すれば

$$(y_1y_2)=\frac{\mathrm{A}}{u}$$

を与える。ただしここにAは前項で定義した量である。この補助変数 u を保ちながら，量 $\left\{\frac{\mathrm{A}}{u}\right\}$ を作り，この量と y_1, y_2 との括弧を作り，等々と一般方法の適用を続けていくことができる。さらに，$\frac{\mathrm{A}}{u}$ は形式 $u\omega$ の特性方程式の一つの第一積分であるから，形式 $\mathrm{A}\omega$ 自身不変であることに注意することができる。

III　一階偏微分方程式への応用

143. 一つの Pfaff の方程式の特性方程式の積分の問題は，一階偏微分方程式の理論に，その一つの直接の応用を見いだす。事実方程式

$$\mathrm{F}\left(z,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

または古典的な記法を使えば

$$\mathrm{F}(z,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)=0 \tag{4}$$

を積分するということは，方程式 (4) と Pfaff の方程式

$$\omega=dz-p_1dx_1-p_2dx_2-\cdots-p_ndx_n=0 \tag{5}$$

とを満足する，x_1, x_2, $\cdots$, x_n の $(n+1)$ 個の関数 z, p_1, $\cdots$, p_n を決定するということである。

さて，もし $2n+1$ 個の変数 z, x_i, p_i のどれか一つが方程式 (4) から他の

$2n$ 個の関数として求められたと仮定すれば，Pfaff の方程式 (5) はもはや $2n$ 個の変数しか含まず，したがってその特性系は必然的に奇数 $2n-1$ 次である。したがって方程式 (4) を考慮に入れれば，Pfaff の方程式 (5) は標準形

(6)
$$dZ-P_1X_1-\cdots-P_{n-1}dX_{n-1}=0$$

に直され得る。ただしここに Z, X_1, $\cdots$, X_{n-1}, P_1, $\cdots$, P_{n-1} は $2n-1$ 個の独立な関数である。これらは方程式 (5) の特性方程式の第一積分である。

さて，方程式 (5) をその標準形 (6) に直す方法を知っていると仮定しよう。方程式 (4) の積分は結局，方程式 (5) がそれから導かれるような，$n+1$ 個（それらの関係は (4) で与えられる）の独立な関係を z, x_1, $\cdots$, x_n, p_1, $\cdots$, p_n の間に決定することであるから，この結果に到達するためには，個数が n で，それから方程式 (6) が導かれるよう独立な関係を Z, X_1, $\cdots$, P_{n-1} の間に樹立すればよい。さてこれは，一般に

$$Z=f(X_1,\ \cdots,\ X_{n-1}),$$

$$P_1=\frac{\partial f}{\partial X_1},\quad \cdots,\quad P_{n-1}=\frac{\partial f}{\partial X_{n-1}}$$

ととれば可能である。ただしここに f はその変数の任意の関数である。さらに一般に，Z, X_1, $\cdots$, X_{n-1} の間に任意個数 $h\leqq n$ 個の独立な関係

$$\Phi_1(Z,\ X_1,\ \cdots,\ X_{n-1})=0,\quad \Phi_2=0,\quad \cdots,\quad \Phi_h=0$$

をおき，これに $n-1$ 個の方程式

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1}+P_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1}+P_1\frac{\partial \Phi_2}{\partial Z}\right)+\cdots+\lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_1}+P_1\frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_1\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_{n-1}}+P_{n-1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial Z}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X_{n-1}}+P_{n-1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial Z}\right)+\cdots+\lambda_h\left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial X_{n-1}}+P_{n-1}\frac{\partial \Phi_h}{\partial Z}\right)=0$$

から斉次媒介変数 λ_1, $\cdots$, λ_h を消去して得られる関係をつけ加えてもよい。

144. 方程式

$$X_1=a_1,\quad \cdots,\quad X_{n-1}=a_{n-1}.$$

$$\mathrm{P}_1=b_1,\quad \cdots,\quad \mathrm{P}_{n-1}=b_{n-1},$$
$$\mathrm{Z}=c$$

は一次元の集合体を定義する。これは Pfaff の方程式 (5) の特性集合体である。(ここに変数は関係 (4) で結ばれていると仮定する。) これは偏微分方程式 (4) の特性曲線とよばれるところのものである。あらゆる積分曲面は特性曲線で生成されているのが直ちにみられる。

特性曲線の微分方程式を作るのは容易である。事実これらの方程式は，変数の微分が関係 $\omega=0$ で，さらに関係 $d\mathrm{F}=0$ で結ばれていると仮定した場合の，ω' の随件系の方程式である。したがって (第104項) これらは，方程式 (5) に方程式

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dz)} & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_1)} & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dx_2)} & \cdots & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dp_1)} & \cdots & \dfrac{\partial\omega'}{\partial(dp_n)} \\ 1 & -p_1 & -p_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial z} & \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_n} \end{matrix} \right\| = 0$$

を付加して得られる。これは

$$\text{(7)}\qquad \frac{dx_1}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dx_n}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial p_n}}=\frac{-dp_1}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}}=\cdots=\frac{-dp_n}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}}$$

とも書かれる。

こうして古典的な方程式がふたたび見いだされる。

IV　Cauchy の方法

145. 以上に説明した方法は，結局特性方程式の積分と，方程式 (5) のその標準形 (6) への変形とに帰着する。もっともこの変形は，これを適当に行なうならば，積分から得られる (第137項)。特性方程式を積分するのに用いられた操作がどうあろうとも，一度特性方程式の積分が行なわれたならば，方程式 (5) のその標準形への変形はつねに可能であるのが容易にみられる。実際それには，

x_n の与えられた数値 x_n^0 に対して，それぞれ

$$z,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ p_1,\ \cdots,\ p_n$$

となるような第一積分を決定すればよい。

もし

$$Z,\ X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n-1},\ P_1,\ \cdots,\ P_n$$

でこれらの第一積分を表わせば，これらは必然的に関係

$$F(Z,\ X_1,\ \cdots,\ X_{n-1},\ x_n^0;\ P_1,\ \cdots,\ P_n)=0$$

で結ばれているが，すでに知っているように第一積分を用いて表わされる関係 (5) は，明らかに

$$dZ-P_1dX_1-\cdots-P_{n-1}dX_{n-1}=0$$

になる。

これが Cauchy の方法の原理である。

V　Lagrange の方法

146. Lagrange の完全積分法もまた容易に以上の見地に結びつけることができる。方程式

(8)
$$V(z,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ a_1,\ \cdots,\ a_n)=0$$

は，もしこれが n 個の任意定数 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ のいかんにかかわらず方程式 (4) を満足する一つの関数 z を定義するならば，一つの完全積分を定義する。なお方程式 (4) は，(8) で定義されるすべての関数 z が満足する唯一の方程式である。なぜなら方程式 (8) と，これから導かれる方程式

(9)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial V}{\partial z}=0, \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial V}{\partial z}=0 \end{cases}$$

の間から $a_1, \cdots, a_n$ を消去すれば，一般には（われわれはそう仮定するのであるが）ただ一つの関係式しか得られないからである。これはもちろん方程式 (4) である。

方程式 (4) は，$(n+1)$ 個の方程式 (8) および (9) の間から $a_1, \cdots, a_n$ を消去した結果であるから，方程式 (4) を積分するということは，$(n+1)$ 個の関係 (8) および (9) で結ばれた $3n+1$ 個の変数 z, x_i, p_i, a_i をもつと考えた Pfaff の方程式 (5) を満足させるということである。さてこれらの関係を考慮すれば

$$0=\frac{\partial V}{\partial z}dz+\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial a_1}da_1+\cdots$$
$$=\frac{\partial V}{\partial z}(dz-p_1dx_1-\cdots-p_ndx_n)+\frac{\partial V}{\partial a_1}da_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial a_n}da_n$$

が得られる。

したがって Pfaff の方程式 (5) は，方程式

$$\frac{\partial V}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial V}{\partial a_2}da_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial a_n}da_n=0$$

と等値である。しかしこの最後の方程式はそれ自身，

$$X_1=a_1,\ \cdots,\ X_{n-1}=a_{n-1},\quad Z=a_n,$$
$$P_1=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}},\quad \cdots,\quad P_{n-1}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial a_{n-1}}}{\dfrac{\partial V}{\partial a_n}}$$

とおけば，その標準形に直される。

特性曲線は方程式

$$V=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial a_1}+b_1\frac{\partial V}{\partial a_n}=0,\quad \cdots,\quad \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}}+b_{n-1}\frac{\partial V}{\partial a_n}=0$$

で定義されるのがみられる。

これは一つの古典的な結果である。

147. 第141項の定理を，二つの独立変数をもった方程式

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{10}$$

という特別な場合にあてはめよう。

特性方程式の二つの独立な第一積分 u および v を知れば，もしこれらが互いに対合にない場合には，特性方程式に対する一つの一次積分不変式を定めることができる。この積分不変式は $A\omega$ である。ただしここに A は等式

$$[\omega du dv]=A[\omega\omega']$$

で，またはむしろ，ここに変数は関係 (10) で結ばれていると考えているのであるから，

$$[dF\omega du dv]=A[dF\omega\omega']$$

で定義される。

両辺においてとくに $[dxdzdpdq]$ の項をとろう。われわれは

$$A=\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial q}}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial z} & \dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+p\dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial p} & \dfrac{\partial u}{\partial q} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+p\dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial p} & \dfrac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix}$$

を見いだす。

したがってもし右辺の行列式が 0 でなければ，$A(dz-pdx-qdy)$ という式は，特性曲線の方程式に対する不変形式である。

VI　一つの無限小変換を許容する一階偏微分方程式

148. もし一階偏微分方程式

$$F(z,\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ p_1,\ \cdots,\ p_n)=0 \tag{4}$$

が，変数 $z,\ x_1,\cdots,p_n$ に働く一つの無限小変換 Af を許容するならば，これは，一つの積分集合体を定義するこれら $2n+1$ 個の変数の間の $n+1$ 個の関係

式の集りが，このすべて変換によってやはり一つの積分集合体を定義する $n+1$ 個の関係式の集りに変換されることを意味する。したがって方程式 (4) を考慮すれば，Pfaff の方程式

(5) $$\omega \equiv dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

は無限小変換 Af を許容する。これから直ちに，一次形式

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(\mathrm{A})} = \frac{\delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \cdots - p_n \delta x_n}{A(z) - p_1 \mathrm{A}(x_1) - p_2 \mathrm{A}(x_2) - \cdots - p_n \mathrm{A}(x_n)}$$

は，特性曲線の微分方程式系に対し不変であることが導かれる（第97項）。

したがって一つの無限小変換を知れば，特性曲線の方程式に対する一次積分不変式を知ることができる。したがって与えられた方程式の積分は，

$$2n+1,\ 2n-1,\ \cdots,\ 3,\ 1$$

次の演算を必要とする第二の型の問題であったから，

$$2n,\ 2n-2,\ \cdots,\ 2,\ 0$$

次の演算を必要とする第一の型の問題に直される。

149. 一つの古典的な例は，与えられた方程式 (1) が z に明示的には関係しない場合である。この場合には，方程式のあらゆる解から，z に任意定数を加えることによって他の一つの解を導き得ることは明らかである。言いかえると，与えられた方程式は無限小変換

$$\mathrm{A}f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

を許容する。

したがって特性曲線の方程式が許容する絶対積分不変式は

$$\int \omega_\delta = \int \delta z - p_1 \delta x_1 - \cdots - p_n \delta x_n$$

である。

この種の方程式の積分法は，第12章の理論から得られる。ω' の特性方程式は，ここでは

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}}=\frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\cdots=\frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

である。二つずつ対合にある $n-1$ 個の第一積分が一度決定されれば，$n-1$ 個の第一積分を任意の定数に等しいとおけば ω という式は一つの完全微分になるのであるから，ω の特性方程式の積分は一つの求積に帰着される。

VII　Jacobi の第一法

150. 一階偏微分方程式の積分に対する Jacobi の第一法は，以上の考察に関係がある。Jacobi は，任意と仮定された方程式 (4) を，もはや未知関数のはいってこない一つの方程式，すなわち

$$F\left(z,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial z}},\ \cdots,\ -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial z}}\right)=0$$

に直す。

簡単のために

$$\frac{\partial V}{\partial z}=u$$

とおけば，積分すべき特性方程式は，絶対不変形式

$$\delta V-u(\delta z-p_1\delta x_1-\cdots-p_n\delta x_n)$$

の特性方程式である。この $2n+3$ 個の変数は関係 (4) で結ばれている。これらは相対積分不変式

$$\int u(\delta z-p_1\delta x_1-\cdots-p_n\delta x_n) \tag{11}$$

を許容する。第12章の方法にしたがってまず積分すべきは，この積分不変式の特性方程式である。

Jacobi の方法は，つぎの差を除けば第142項で示した方法と一致する。すなわち第 142 項の方法は，積分 (11) を絶対積分不変式として利用しているが，

Jacobi の方法はこれを相対積分不変式として利用している。さらに Jacobi の方法は

$$2n+1,\ 2n-1,\ \cdots,\ 1$$

次の演算でなく

$$2n+2,\ 2n,\ \cdots,\ 2,\ 0$$

次の演算にわれわれを導く。

その利点は，Poisson-Jacobi の定理をあてはめて，与えられた第一積分の知識を利用し得るという点である。しかしながらこの利点は，与えられた第一積分を最大限に利用する第142項の方法によって保持されている。

VIII　ある種の微分方程式の一階偏微分方程式への変形

151. こんどは，前項におけるそれとは逆の見地に立つことができる。

まず偶数 $2s$ 個の変数をもった一つの Pfaff の方程式を考えよう。しかし係数はそのうち $s+1$ 個のみが 0 と異なると仮定しよう。すなわち

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_{s+1} dx_{s+1} = 0.$$

この Pfaff の方程式の特性方程式は明らかに，

$$x_{s+1}=z,\quad a_1+p_1 a_{s+1}=0,\ \cdots,\ a_s+p_s a_{s+1}=0$$

とおいてこれら $s+1$ 個の方程式の間から $x_{s+1},\ x_{s+2},\ \cdots,\ x_{2s}$ を消去して得られる，s 個の独立変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s$ をもった一階偏微分方程式のそれと同一である。もちろん消去は可能であって，ただ一つの関係を与えると仮定しなければならない。

152. 第二に，相対一次積分不変式 $\int\omega$ を許容する微分方程式系を考えよう。ここに形式 ω は $2s+1$ 個の変数をもち，$[\omega'^s]$ は 0 と異なるとする。考えている微分方程式は，ω' の特性方程式である。もし ω において微分のうちの s 個

の係数が 0 であれば，すなわち

$$\omega \equiv a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_{s+1} dx_{s+1}$$

であれば，考えている方程式の積分は，未知関数を明示的には含まぬ一つの一階偏微分方程式の積分に直し得る。実際 Pfaff の方程式

$$dV - \omega \equiv dV - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 - \cdots - a_{s+1} dx_{s+1} = 0$$

を考えて

$$p_1 = a_1,\ p_2 = a_2,\ \cdots,\ p_{s+1} = a_{s+1}$$

とおこう。これら $s+1$ 個の方程式から x_{s+2}, $\cdots$, x_{2s+1} を消去すれば，関係

(12) $$F(x_1,\ \cdots,\ x_{s+1};\ p_1,\ \cdots,\ p_{s+1}) = 0$$

が導かれる。これは上にのべた偏微分方程式にほかならない。この方程式の特性曲線の微分方程式は，ω' の特性曲線の方程式に，方程式

$$dV - \omega = 0$$

を付加したものから成っている。

ω' の特性方程式の，第12章で示した積分法は，偏微分方程式 (12) の特性曲線をさがす場合と同じ演算にわれわれを導いていく。

もし不変式 $\int\omega$ が力学の方程式のそれ

$$\omega = p_1 \delta q_1 + \cdots + p_n \delta q_n - H\delta t$$

であれば，方程式 (12) は Jacobi の方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t,\ q_1,\ \cdots,\ q_n;\ \frac{\partial V}{\partial q_1},\ \cdots,\ \frac{\partial V}{\partial q_n}\right) = 0$$

にほかならない。

153. したがって力学の方程式の積分に対する Jacobi の方法は，つぎの二つの積分の問題が同一であるということに基いている。すなわち一つは相対一次積分不変式 $\int\omega$ の特性系のそれ，他は一つの無限小変換を許容する（たとえば未知関数を明示的に含まない）一階偏微分方程式の特性方程式のそれである。二つの場合に問題の性質は積分不変式 $\int\omega$ の存在によって決定される。

偏微分方程式に帰着させるというこの方法は，$2s+1$ 変数の形式 ω が，0 である s 個の係数をもつのでなければ成功しない。しかしながらそのために，この特殊性が起こらぬ場合には，ω' の特性方程式の積分が，未知関数を明示的に含まぬ一階偏微分方程式の特性曲線を求めること，または同じことになるが，正準微分方程式系の積分よりさらに複雑な問題であると思ってはならない。結局正準方程式の重要性は，もっぱら積分不変式 $\int\omega$ を許容するという性質にあるのであって，その簡単な形にあるのではない。基本的な性質は積分不変式の存在であって，他のすべてはこれから導かれる。

IX Jacobi の方法の主な実際的応用の性格に対する注意

154. 実際 Jacobi の方法が力学において示す豊かな応用の大部分は，その源を，そのおのおのに t 以外の変数 $q_1, \cdots, q_n$ の一部しか現われないような関数の和として得られる，Jacobi の偏微分方程式の完全解の研究が示す簡単化のなかに発している。しかしながらこれらの簡単化は，一階偏微分方程式および完全積分の理論に一つも頼ることなく明らかにすることができる。

実際 ωを $2s+1$ 個の変数をもった一次微分形式とし，これらの変数を

$$x_1, \cdots, x_{2s}, t$$

で示そう。ω は p 個の項

$$\omega=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_p$$

の和に分解され，形式 ω_i は変数 x と変数 t のある個数 $2h_i$ で作られ，形式 $\omega_1, \cdots, \omega_p$ の任意の二つの形式にはいってくる変数 x は相異なると仮定しよう。したがって

$$s=h_1+h_2+\cdots+h_p$$

である。

もし外二次形式 ω' は階数 $2s$ であると仮定すれば，形式 $\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_p'$ はそれぞれ階数 $2h_1, 2h_2, \cdots, 2h_p$ であることが必要である。したがってこれら

p 個の形式のおのおののその正準形への変形は，ω' に対して同様な変形をひき起こす。したがって ω' の特性方程式の積分は，ω_1', ω_2', $\cdots$, ω_p' の特性方程式の積分に帰着する。これら p 個の対応する問題は，互いに独立に解かれ得る。

もしこれらの形式を組立てるときに t と同時にはいってくる（相異なる形式 ω_i に対しては相異なる）変数 x の数 k_i がすべては偶数でなければ，さらに大きな簡単化が起こる。この場合には，変数 t は，ω' の特性方程式の一つの第一積分である。実際 t に一つの任意の定数値を与えれば，二次形式 ω_i の階数は

偶数の k_i に対しては高々 k_i,

奇数の k_i に対しては高々 k_i-1

だけ減ずる。さて $2s$ はすべての k_i の和に等しい。したがって ω' の階数は，定数の t に対しては $2s$ より小さい。これで証明された。さらに，奇数である数 k_i は二つしかあり得ず，t を定数としたときの ω' のその標準形への変形は，やはり t を定数としたときの ω_1', $\cdots$, ω_p' の標準形への変形で与えられる。

第 15 章

いくつかの一次積分不変式を許容する微分方程式

I　未知関数と同数個の積分不変式を知っている場合

155. 本講では，任意個数の積分不変式を許容する微分方程式の積分という一般的な問題はとり扱わない。n 個の未知関数をもった n 個の一階常微分方程式系が，n 個の（独立な）不変一次形式

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n,$$

すなわち n 個の一次絶対積分不変式

$$\int\omega_1,\ \int\omega_2,\ \cdots,\ \int\omega_n$$

を許容するという，とくに簡単な場合だけを考えよう。

この特別な場合には，与えられた微分方程式は

$$\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_n=0 \tag{1}$$

と書かれ得る。

外二次形式 ω_1', ω_2', $\cdots$, ω_n' は不変であるから，これらは

$$\omega_s'=\sum_{(ik)}^{1\cdots n} c_{iks}[\omega_i\omega_k] \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

という公式によって，ω_1, $\cdots$, ω_n を用いて表わし得られる。係数 c_{iks} は明らかに与えられた微分方程式の第一積分である。いつでもこれらが定数である場合に帰着せしめ得ることを示そう。

実際，積分 c_{iks} のうちに，ある個数 r 個だけ独立なのがあったと仮定して，これらを

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_r$$

で示そう。この場合 c_{iks} はこれら r 個の積分の定まった関数である。各微分 dy_i は不変であるから，$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を用いて一次に表わされる。すなわち

$$dy_i = b_{i1}\omega_1 + b_{i2}\omega_2 + \cdots + b_{in}\omega_n \qquad (i=1, 2, \cdots, r).$$

係数 b_{ik} はまた第一積分である。もしこれらのうちに，互いに独立であり，しかも y_i とも独立なものが r' 個あったとすれば，それらの微分 $dy_{r+1}, \cdots, dy_{r+r'}$ はまた ω_i の関数として一次に表わされる。等々。こうして，ついにこれらの演算が終わって，公式 (2) の係数 c_{iks} と公式

(3)
$$dy_i = b_{i1}\omega_1 + \cdots + b_{in}\omega_n \qquad (i=1, 2, \cdots, \rho)$$

の係数 b_{ik} とが，$y_1, y_2, \cdots, y_\rho$ の一定の関数であるというときに達するであろう。

さて，考えを定めるために，b_{ik} の表から最初の ρ 列をとって得られる行列式は0でないと仮定しよう。そうすれば ρ 個の不変形式 $\omega_1, \cdots, \omega_\rho$ を不変形式 $dy_1, \cdots, dy_\rho$ でおきかえることができる。もし $y_1, \cdots, y_\rho$ に任意の定数値を与えるならば，積分すべき方程式系は $n-\rho$ 個の不変形式 $\omega_{\rho+1}, \cdots, \omega_n$ を許容し，われわれは

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{\rho+1\cdots n} c_{iks}[\omega_i\omega_k] \qquad (s=\rho+1, \cdots, n)$$

を得る。ここに係数 c_{iks} はいまや定数である。

156. したがって，公式 (2) において係数 c_{iks} がことごとく定数である場合をとろう。まず，逆に (2) のような関係の存在から，結果として，形式 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ が微分方程式 (1) に対して不変であるという性質の導かれることをみるのは容易である。実際（第78項），形式 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ の集りの特性系は，方程式 (1) に $\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_n'$ の随伴系の方程式をつけ加えて得られる。しかもこれらはすべて方程式 (1) から導かれる結果である。

もし形式 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を，定数係数の一次結合

(4)
$$\begin{cases}\bar{\omega}_1=a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_2+\cdots+a_{1n}\omega_n,\\ \cdots\cdots\\ \bar{\omega}_n=a_{n1}\omega_1+a_{n2}\omega_2+\cdots+a_{nn}\omega_n\end{cases}$$

でおきかえるならば，これら n 個の新しい形式はやはり不変であって，なお新しい定数 $\bar{c}_{iks}$ を用いて関係

$$\bar{\omega}_s'=\sum_{(ik)}^{1\cdots n}\bar{c}_{iks}[\bar{\omega}_i\bar{\omega}_k]$$

が成立する。この場合われわれは，$\bar{c}_{iks}$ の表は c_{iks} の表と同じ構造をもっているといおう。

置換 (4) の定数係数 a_{ij} を，最初の $\nu<n$ 個の微分 $\bar{\omega}_1', \cdots, \bar{\omega}_\nu'$ のなかには $\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_\nu$ しかはいってこないように，すなわち

$$\bar{c}_{\nu+i,k,s}=\bar{c}_{k,\nu+i,s}=\bar{c}_{\nu+i,\nu+j,s}=0 \qquad (k, s=1, 2, \cdots, \nu;\ i, j=1, \cdots, n-\nu)$$

が成立するように選び得ることがある。

この場合には形式 $\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_\nu$ は，完全積分可能な Pfaff の方程式系

$$\bar{\omega}_1=\bar{\omega}_2=\cdots=\bar{\omega}_\nu=0$$

に対して不変である。もしこの系を積分することができたとして，その第一積分を任意定数に等しいとおけば，与えられた系は，n が $n-\nu$ でおきかえられるという点を除けば，最初の系と類似な系に直される。

以上の変形を可能ならしめるような，定数係数の一次置換を見いだすことができない場合には，c_{iks} の表は単純であるという。そうすれば，与えられた微分方程式系は，そのおのおのに対して c_{iks} の表が単純であるようなそれにつづく系に直され得るのがみられる。各単純な表にはそれぞれ特殊な積分の問題が対応する。

157. この変形法はしばらく別にして，第二の微分方程式系

(1′)
$$\pi_1=\pi_2=\cdots=\pi_n=0$$

であって，関係

$$(2') \qquad \pi_s' = \sum_{(ik)}^{1\cdots n} c_{iks}[\pi_i \pi_k]$$

をもつ n 個の不変形式 π_i を許容するものを考えよう。ただしここに係数 c_{iks} は，公式 (2) におけると同じ数値をもつものとする。それぞれ

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,$$

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$$

を，第一のそれは方程式 (1) に対する，第二のそれは方程式 (1′) に対する，二系の独立な第一積分としよう。そうすれば $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は y_i とその微分を用いて表わされ，同様に $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ は z_i とその微分とを用いて表わされる。第一積分 z_i を，ω_i が y_i と dy_i を用いて表わされると同じ仕方で π_i が z_i と dz_i とで表わされるように選ぶことが可能である。これは，もしこの条件が満足されておらなければ，少なくも

$$z_1 = f_1(y_1,\ \cdots,\ y_n),\ \cdots,\ z_n = f_n(y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

とおけば，π_i がそれぞれ ω_i に等しくなるような関数

$$f_1(y_1,\ \cdots,\ y_n),\ \cdots,\ f_n(y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

を見いだし得るということである。そのためには全微分方程式

$$(5) \qquad \begin{cases} \pi_1 - \omega_1 = 0, \\ \cdots \\ \pi_n - \omega_n = 0 \end{cases}$$

を積分すればよい。ただしここに z_i は独立関数 y_i の未知関数である。このPfaff 系 (5) は完全積分可能である (第101項)。なぜなら，もし方程式 (5) を考慮すれば，その左辺の外微分

$$\pi_s' - \omega_s' = \sum c_{iks}[\pi_i \pi_k] - \sum c_{iks}[\omega_i \omega_k]$$

は全部 0 となるからである。したがって上にのべた条件を満足させることは可能である。しかも (n 個の定数に関して) 無限に多くの仕方で可能である。

これはとくに，積分に対して $\omega_1, \cdots, \omega_n$ が不変形式であるという与えられた性質だけを利用するすべての方法は，二つの系 (1) および (1′) に対して平行

にあてはめられ，(1) の積分におけるすべての段階には，(1′) の積分におけるそれに対応するものがあるという意味で，二つの系 (1) および (1′) の積分は，本質的には同じ性質の二つの問題であることを示している。

II 与えられた不変式を変えない群

158. 系 (1) に戻って，n 個の独立な第一積分

$$y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$$

を選んだと仮定しよう。

形式 ω_s が y_i とその微分とで表わされる表わされ方と同じ仕方で，ω_s が $\bar{y}_i$ とその微分とで表わされるような，他の n 個の第一積分の集まり

$$\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \cdots,\ \bar{y}_n$$

を無限に多く見いだすことが可能である。そのためには Pfaff 系

$$\begin{cases} \bar{\omega}_1-\omega_1=0, \\ \cdots \\ \bar{\omega}_n-\omega_n=0 \end{cases}$$

を積分すればよい。ただしここに $\bar{\omega}_s$ は，ω_s が y_i と dy_i の関数であると同じ，$\bar{y}_i$ と $d\bar{y}_i$ の関数である。この Pfaff 系において，変数 $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n$ を独立変数 $y_1, \cdots, y_n$ の未知関数とみなそう。このような Pfaff 系は，Pfaff 系 (5) に対して示したと同じ理由によって完全積分可能である。したがって n 個の任意定数に関係し，上にのべた条件を満足する関数

(7) $$\bar{y}_s=f_s(y_1,\ \cdots,\ y_n;\ C_1,\ \cdots,\ C_n) \qquad (s=1, 2, \cdots, n)$$

が存在する。

方程式 (7) は，第一積分 $y_1, \cdots, y_n$ に対して施され，問題に与えられたものを変えない，すなわち形式 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ を不変にする，無限に多くの変換を定義する。これらの変換は一つの群 G を作る。なぜなら，これらは ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_n を変えないという性質で特長づけられるのであるから，引き続いて (7)

という形の二つの変換を行なえば，結果として同じ形の変換を得るからである。この群Gは，n 変数の有限次元の群である。これは，与えられた Pfaff 系の第一積分に施され，与えられた不変形式を与えないところの最大の群である。容易に認められるように，n 個の不変形式を知っていればどんな得があるかということは，この群の性質に関係する。もっともこれは，積分不変式，不変方程式系，無限小変換などについて前もって何か知っているすべての場合にあてはまる一般的な事実である。与えられた微分方程式の第一積分に（または同じことであるが全体として考えられた積分曲線に）施され，既知の情報をかえないような最大の変換群は，Pfaff 系の積分において非常に大きな重要性をもっている。

われわれの取り扱っている場合にはとくに，単に ω_1, $\cdots$, ω_n が不変形式であるという事実のみに基いて，第一積分を積分なしに求めることは不可能であるのがみられる。[1] なぜなら，もしそうでないとすれば，形式 ω_1, $\cdots$, ω_n が不変であるという性質自身から，たとえば第一積分 y_1 をとくにぬき出すことができる。したがって y_1 は公式 (7) によって定義される積分 $\overline{y}_1$ のいずれか一つに等しくなければならない。さてこれは明らかに不可能である。なぜなら方程式 (6) はつねに，y_1, $\cdots$, y_n の与えられた数値に対して，$\overline{y}_1$, $\cdots$, $\overline{y}_n$ の任意の数値が対応するというような解を許容するからである。

159. 定数 c_{iks} は群 G に対して非常に重要な役割を演ずる。これらは，群論において，この群の**構造定数**とよばれるところのものである。上に示した変形法は（第156項），ちょうど G の部分群の正規列への分解に基いている。c_{iks} の表が単純である場合は，単純群に対応する。

一つの群の構造定数は任意でないことが知られている。この場合にはこれを，ω_1', ω_2', $\cdots$, ω_n' の外微分が 0 であることを書き表わして験証される。ω_s'

(1)　これは，ω_1, $\cdots$, ω_n に施され，これらの形式の係数の性質いかんにかかわらず施され得る，同種の演算の任意の一系によって，という意味である。

の外微分は，ω_1', $\cdots$, ω_n' の式 (2) を利用すれば，(第73項)

$$\sum_{(ik)}^{1\cdots n} c_{iks}([\omega_i'\omega_k]-[\omega_i\omega_k']) = \sum_{(\alpha\beta\gamma)}^{1\cdots n}\left(\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}c_{i\gamma s}+c_{\beta\gamma i}c_{i\alpha s}+c_{\gamma\alpha i}c_{i\beta s}\right)[\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\gamma]$$

である。したがってわれわれは当然成り立つべき関係

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_{\alpha\beta i}c_{i\gamma s}+c_{\beta\gamma i}c_{i\alpha s}+c_{\gamma\alpha i}c_{i\beta s}=0 \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を得る。

群論において，c_{iks} を構造定数としてもつ群が存在するために，これらの条件が十分であることが証明される。

III 例

160. すべての定数 c_{iks} が 0 であると仮定しよう。この場合には，形式 ω_1, $\cdots$, ω_n は完全微分であるから，積分は n 回の独立な求積しか必要としないことは明らかである。形式 ω_1, $\cdots$, ω_n は

$$\omega_1=dy_1,\quad \omega_2=dy_2,\quad \cdots,\quad \omega_n=dy_n$$

と直し得るから，群 G は方程式として

$$y_s'=y_s+\mathrm{C}_s \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

をもっている。

もし $s=1$ であれば，以上の場合がつねに起こる。

$n=2$ に対して，起こり得るあらゆる場合はどうであるかを調べよう。上に調べた場合の他に，

$$\omega_1'=a[\omega_1\omega_2],$$
$$\omega_2'=b[\omega_1\omega_2]$$

が起こり得る。ここに係数 a, b は，二つともは 0 でない。

たとえば $b \neq 0$ と仮定しよう。$a\omega_2-b\omega_1$ を新しい形式 $\bar{\omega}_1$ にとって，

$$\bar{\omega}_1'=0,$$
$$\omega_2'=[\bar{\omega}_1\omega_2]$$

であることが直ちに認められる。

一回求積を行なえば，

$$\bar{\omega}_1 = dy_1$$

が与えられる。つぎに y_1 を一つの任意定数に等しいとおけば，ω_2 は一つの完全微分となって，第二回目の求積で積分が完了される。少しく記法をかえて，われわれは

$$\omega_1 = \frac{dy_1}{y_1},$$

$$\omega_2 = \frac{dy_2}{y_1}$$

とおくことができる。

群 G は方程式として

$$y_1' = C_1 y_1,$$

$$y_2' = C_1 y_2 + C_2$$

をもっている。

161. $n=3$ に対しては，一般的な議論は行なわない。ただ，公式 (2) を

$$\omega_1' = [\omega_1 \omega_2],$$

$$\omega_2' = [\omega_1 \omega_3],$$

$$\omega_3' = [\omega_2 \omega_3]$$

に直し得る，最も興味深い場合だけを指摘しておこう。

この場合には，方程式 (1) の積分は，一つの Riccati の方程式の積分になる。

事実 Pfaff の方程式

$$dt + \omega_1 + t\omega_2 + \frac{1}{2}t^2\omega_3 = 0 \tag{8}$$

を考えよう。ここに t は，与えられた微分方程式に現われる従属および独立変数の一つの未知関数であるとみなされる。この方程式は完全積分可能である。

事実その左辺の外微分が，この方程式自身を考慮すれば（そして ω_1', ω_2', ω_3' の式を利用すれば）0になることが容易に験証される。したがってすでに知っているように，その積分を一つの常微分方程式の積分に直すことができる。これは明らかに一つの Riccati の方程式である。さて，もし y_1, y_2, y_3 で，与えられた方程式 (1) の独立な第一積分の集まりを表わせば，式 ω_1, ω_2, ω_3 は三つの量 y_1, y_2, y_3 とその微分とを用いて表わし得られる。したがって方程式 (1) の一般解 t は，y_1, y_2, y_3（および一つの任意定数 C）の関数である。したがって，もし Riccati の方程式 (8) を古典的な形

$$t=\frac{\alpha+C\beta}{\gamma+C\delta}$$

に積分したとすれば，四つの関数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の比は，与えられた方程式の三つの第一積分を与える。そしてこれらが独立であることが容易に証明される。

IV 拡　　張

162. われわれはこの理論についてこれ以上のべないことにする。これを適当に展開するためには，群論に対する相当広汎な知識を必要とする。しかし，もし与えられた積分不変式を許容する微分方程式の積分法を最後まで押し進めていくならば，この群論がいかに必然的にはいってくるかがみられる。ただ第142項で示した方法が，不変形式，不変 Pfaff 方程式等を許容する任意の微分方程式系に対して拡張され得ることだけを指摘しておこう。これは，補助変数を導入して，与えられた方程式系がもつ独立な第一積分と同数個の一次積分不変式を作る方法である。一例を示せば，この方法の精神を示すには十分であろう。

4変数の微分方程式系 (S)

$$\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$$

を積分するものと仮定しよう。そして方程式 $\omega_1=0$, $\omega_2=0$, $\omega_3=0$ のおのおのは，与えられた微分方程式系に対して不変であると仮定しよう。新しい三つの

補助変数 u_1, u_2, u_3 を導入して，三つの形式

$$\bar{\omega}_1=u_1\omega_1,\quad \bar{\omega}_2=u_2\omega_2,\quad \bar{\omega}_3=u_3\omega_3$$

を考えよう。

これら三つの形式の特性方程式 (Σ) の積分は，(Σ) の任意の一つの解を定義する関係から u_1, u_2, u_3 を消去することによって与えられる微分方程式の積分を導く。そこで外微分 $\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_2', \bar{\omega}_3'$ を作ろう。最初の変数の関数 a_1, a_2, a_3 を係数として

$$\omega_1'\equiv a_1[\omega_2\omega_3] \qquad (\text{mod. } \omega_1),$$

$$\omega_2'\equiv a_2[\omega_3\omega_1] \qquad (\text{mod. } \omega_2),$$

$$\omega_3'\equiv a_3[\omega_1\omega_2] \qquad (\text{mod. } \omega_3)$$

が成立すると仮定すれば，われわれは

$$\bar{\omega}_1'\equiv\frac{a_1u_1}{u_2u_3}[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3] \qquad (\text{mod. } \bar{\omega}_1),$$

$$\bar{\omega}_2'\equiv\frac{a_2u_2}{u_3u_1}[\bar{\omega}_3\bar{\omega}_1] \qquad (\text{mod. } \bar{\omega}_2),$$

$$\bar{\omega}_3'\equiv\frac{a_3u_3}{u_1u_2}[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2] \qquad (\text{mod. } \bar{\omega}_3)$$

を得る。

したがって係数

$$\bar{a}_1=\frac{a_1u_1}{u_2u_3},\quad \bar{a}_2=\frac{a_2u_2}{u_3u_1},\quad \bar{a}_3=\frac{a_3u_3}{u_1u_2}$$

は，形式 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ の特性系 (Σ) の第一積分である。したがって

$$\sqrt{\bar{a}_2\bar{a}_3}=\frac{\sqrt{a_2a_3}}{u_1}$$

に関しても同様であり，したがって形式

$$\sqrt{\bar{a}_2\bar{a}_3}\,\bar{\omega}_1=\sqrt{a_2a_3}\,\omega_1$$

はやはり一つの不変形式である。しかしながらこれは補助変数 u_1, u_2, u_3 を含んでいない。したがってこれは与えられた方程式 (S) に対する一つの不変形

式である。したがって $\sqrt{a_3a_1}\omega_2$，$\sqrt{a_1a_2}\omega_3$ に対しても同様である。したがって係数 a_1，a_2，a_3 のいずれもが 0 でなければ，与えられた微分系は三つの不変一次形式を許容する。したがってわれわれは本章で取り扱った問題にもどる。

もちろんつねにこうなるとは限らないのであるが，いずれの場合にも，与えられた方程式に対する既知の知識を最大限に利用する方法はあるのである。

第 16 章

与えられた無限小変換を許容する微分方程式

I 問題の変形

163. われわれはすでに，いくつかの無限小変換を許容する微分方程式を考えた。しかしながらこれらの方程式は，一つの積分不変式，または一つの不変 Pfaff 方程式を許容すると仮定した。われわれは今度はこれより少しく一般な見地をとろう。これは前章でそのあらましをのべた理論の一つの例をわれわれに与えるであろう。

n 個の常微分方程式系（または完全積分可能な n 個の Pfaff 方程式系）

(1)
$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 0$$

を考えよう。そしてこの微分方程式系がある個数 $r \leqq n$ 個の無限小変換

$$A_1 f,\ A_2 f,\ \cdots,\ A_r f$$

を許容すると仮定しよう。

積分に対して，これら r 個の無限小変換を知っているということからいかなる利点を引き出し得るかを調べよう。これは S. Lie によって解かれた問題である。われわれはその本質的な部分の概要だけをのべよう。

形式 ω_i において不定な微分記号を無限小変換の記号 $A_k f$ でおきかえて得られる量 $\omega_i(A_k)$ の表を考えよう。この表

(2)
$$\left\| \begin{matrix} \omega_1(A_1), & \omega_1(A_2), & \cdots, & \omega_1(A_r) \\ \omega_2(A_1), & \omega_2(A_2), & \cdots, & \omega_2(A_r) \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \omega_n(A_1), & \omega_n(A_2), & \cdots, & \omega_n(A_r) \end{matrix} \right\|$$

において，最初の r 行と r 列とで作った行列式は 0 でないと仮定しよう。そう

すれば方程式 (1) の左辺を，これらの左辺の一次結合でおきかえて，この表が

$$(3)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

となるように，すなわち

$$\omega_1(\mathrm{A}_1)=\omega_2(\mathrm{A}_2)=\cdots=\omega_r(\mathrm{A}_r)=1$$

を除くすべての $\omega_i(\mathrm{A}_j)$ が 0 になるようにすることができる。

もし n のほうが r より大であれば，新しい形式 $\omega_1, \cdots, \omega_n$ は完全には決定されないことは明らかである。われわれは

$$\omega_{r+1},\quad \cdots,\quad \omega_n$$

に対してさらに任意の一次変換を施すことができる。そして形式 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ のおのおのに $\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n$ の任意の一次結合を加えることができる。

もし方程式 (1) が

$$dy_1=dy_2=\cdots=dy_n=0$$

の形におかれていたとすれば，量 $\omega_i(\mathrm{A}_j)=\mathrm{A}_j(y_i)$ は第一積分であるから，$\omega_i(\mathrm{A}_j)$ の表をその標準形に直して得られる新しい形式 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は，つねに y_i とその微分とで作られていると想像することができる。このことと，上にのべたことからつぎの二つの結論が得られる。

1° $\omega_i(\mathrm{A}_k)$ の表がその標準形 (3) に直されていればいつでも，Pfaff 系

$$(4)\qquad \omega_{r+1}=\cdots=\omega_n=0$$

は一つの不変系である。

2° 一次形式 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ のおのおのは，その前の不変 Pfaff 系の左辺の一次結合を除けば，一つの不変形式である。

164. さらに先へ進むまえに，もし微分方程式系 (1) が二つの無限小変換 $\mathrm{A}f$

および Bf を許容すれば，それは，記号が

$$Cf=A(Bf)-B(Af)$$

で定義される無限小変換 Cf を許容することに注意しよう。

与えられた r 個の変換から二つずつをとって導かれる無限小変換の記号は，$A_1f, \cdots, A_rf$ の一次結合であると仮定しよう。言いかえると

$$(5)\qquad A_i(A_kf)-A_k(A_if)=\sum_{s=1}^{s=r}\gamma_{iks}A_sf \qquad (i, k=1, 2, \cdots, r)$$

が成立すると仮定しよう。こう仮定しても一般性を失なわない。

この仮定のもとでわれわれは，Pfaff 系 (4) が完全積分可能であることを証明しよう。

この証明を行なうためには，二つの微分記号 δ, δ' が互いに交換可能ではないという，いままでわれわれの考えなかった場合における，一次形式 ω の双一次共変式 $\omega'(\delta, \delta')$ の定義にもどらなければならない。もし

$$\omega(\delta)=a_1\delta x_1+a_2\delta x_2+\cdots+a_n\delta x_n$$

とおけば

$$\delta\omega(\delta')-\delta'\omega(\delta)=a_1(\delta\delta' x_1-\delta'\delta x_1)+\cdots+a_n(\delta\delta' x_n-\delta'\delta x_n)$$
$$+\sum\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}-\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(\delta x_i\delta' x_k-\delta x_k\delta' x_i),$$

または

$$\delta''=\delta\delta'-\delta'\delta$$

とおくことに約束すれば

$$(6)\qquad \delta\omega(\delta')-\delta'\omega(\delta)=\omega(\delta'')+\omega'(\delta, \delta')$$

を得る。

記号 δ および δ' が記号 A_if および A_kf でおきかえられた場合にこの公式をあてはめよう。この場合には δ'' を記号

$$A_i(A_kf)-A_k(A_if)=\sum\gamma_{iks}A_sf$$

でおきかえるのが便利である。

最後に，すでにみたように，$y_1, \cdots, y_n$ とその微分とで表わされていると仮

定し得る形式 $\omega_{r+1}, \cdots, \omega_n$ 中の任意の一つを，ω としてとったと想像しよう。われわれは

$$\omega_{r+\alpha}' = \sum c_{\lambda, \mu, r+\alpha}[\omega_\lambda \omega_\mu]$$

を得る。さて

$$\omega_{r+\alpha}(\mathrm{A}_i) = \omega_{r+\alpha}(\mathrm{A}_k) = \omega_{r+\alpha}(\mathrm{A}_s) = 0$$

である。したがってわれわれは関係

$$\sum c_{\lambda, \mu, r+\alpha}[\omega_\lambda(\mathrm{A}_i)\omega_\mu(\mathrm{A}_k) - \omega_\mu(\mathrm{A}_i)\omega_\lambda(\mathrm{A}_k)] = 0$$

を得る。

これから係数 $c_{\lambda, \mu, r+\alpha}$ は，指標 λ, μ が二つとも r より小，または r に等しくなければすぐに 0 になることがわかる。なぜならこの場合には，上の関係は明らかに

$$c_{i, k, r+\alpha} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, r)$$

となるからである。

したがって，外微分 $\omega_{r+1}', \cdots, \omega_k'$ は方程式 (4) を考慮に入れれば全部 0 となるのであるから，Pfaff 方程式系 (4) は確かに完全積分可能である。（第101項）

II　未知関数と同数個の無限小変換がある場合

165. こんどは Pfaff 方程式系 (4) を積分したと考えよう。これは全く任意な，完全積分可能な Pfaff 系である。もっと簡単にこの系 (4) の一つの解を知ったと仮定しよう。この解には，与えられた系において，方程式

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_r = 0 \tag{7}$$

を積分して得られる無限に多くの解が対応する。これは，その r 個の不変形式 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ が知れている一つの系である。こうしてわれわれは，前章で取り扱った問題に導かれる。

ここに $\omega_1', \cdots, \omega_r'$ の式

$$\omega_s' = \sum_{(ik)}^{1\cdots n} c_{iks}[\omega_i \omega_k]$$

のなかにはいってくる係数 c_{iks} を先験的に定めることは容易である。

実際公式 (6) を，記号 δ を記号 A_α で，記号 δ' を記号 A_β で，記号 δ'' を $\sum_{\rho=1}^{\rho=r} \gamma_{\alpha\beta\rho} A_\rho$ でおきかえてあてはめよう。

すべての $\omega_i(A_k)$ は 0 または 1，すなわち定数であるから，公式 (6) は

$$0 = \gamma_{\alpha\beta s} + c_{\alpha\beta s}$$

となる。したがってわれわれは

$$c_{iks} = -\gamma_{iks}$$

を得る。

166. こんどは，係数 γ_{iks} が定数である場合に限ろう。この場合には，与えられた無限小変換 $A_1 f, \cdots, A_r f$ は，構造定数が γ_{iks} であるような一つの r 媒介変数群 Γ を生成することが証明される。系 (7) は前章で研究したそれの範疇にはいり（第156項），これに対応する群Gは，与えられた微分系 (7) を許容する群 Γ と同じ構造をもっているのがみられる。この群 G は，第一積分 $y_1, \cdots, y_r$ に施され，与えられた無限小変換によってこれらの第一積分がどう入れかわるかという規則をかえないところの最大の群である。実際 f で $y_1, \cdots, y_r$ の任意の関数を表わそう。恒等的に，すなわち微分 $dy_1, \cdots, dy_r$ のいかんにかかわらず，そしてまた変数 $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial f}{\partial y_r}$ のいかんにかかわらず，

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_r} dy_r = \pi_1 A_1 f + \cdots + \pi_r A_r f$$

が成立するように，r 個の Pfaff の式 $\pi_1, \cdots, \pi_r$ を一通りそしてただ一通りの仕方で定め得ることは明らかである。もしこの恒等式において不定な微分記号 d を記号 $A_k f$ でおきかえれば，われわれは

$$A_k f = \pi_1(A_k) A_1 f + \cdots + \pi_r(A_k) A_r f$$

を得る。したがって

$$\pi_1(A_1)=\pi_2(A_2)=\cdots=\pi_r(A_r)=1$$

を除いたすべての $\pi_i(A_k)$ は 0 である。したがって結局，形式 π_i は形式 ω_i と同一になる。さて $y_1, \cdots, y_r$ に対して群 G の一つの変換を施そう。これらの量は $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_r$ となる。$y_1, \cdots, y_r$ の関数 f は，$\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_r$ の一つの関数 $\bar{f}$ となる。記号 $A_1f, \cdots, A_rf$ は $\bar{A}_1\bar{f}, \cdots, \bar{A}_r\bar{f}$ となって，われわれは

$$d\bar{f}=\bar{\omega}_1\bar{A}_1\bar{f}+\cdots+\bar{\omega}_r\bar{A}_k\bar{f}$$

を得る。しかしながら $\bar{\omega}_i$ は，ω_i が y_i とその微分とで作られていると同じ仕方で，$\bar{y}_i$ とその微分とで作られているのであるから，$\bar{A}_i\bar{f}$ における $\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}_k}$ の係数は，A_if における $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ が $y_1, \cdots, y_r$ の関数であると同じ $\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_r$ の関数である。言いかえれば，与えられた無限小変換は $\bar{y}_i$ と y_i を同じように変える。

さらにここに群 G は，第一積分に施されて，既知の材料を変えない最大の群であるのがみられる。

III　二階微分方程式への応用

167. われわれはすでに $n=r=1$ の場合を直接取り扱った。二，三の他の例をとろう。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

という形の二階微分方程式は，

$$dy-y'dx=0,$$

$$dy'-F(y')dx=0$$

という Pfaff 系と同値である。これは二つの無限小変換

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Bf=\frac{\partial f}{\partial y}$$

を許容する。量 $\omega_i(A_k)$ の表をその標準形に直すためには

$$\omega_1=dx-\frac{dy'}{F(y')},$$

$$\omega_2 = dy - \frac{y'dy'}{F(y')}$$

ととらなければならない。

これら二つの不変形式は完全微分である。したがってわれわれは，求める一般解を二つの独立な求積

$$x - \int \frac{dy'}{F(y')} = C_1, \quad y - \int \frac{y'dy'}{F(y')} = C_2$$

によって得る。

こんどは

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

という形の二階微分方程式をとろう。この微分方程式は x 軸に平行な並進と，Oを中心とする相似変換とを許容する。これは二つの無限小変換

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Bf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

に対応する。与えられた方程式は，系

$$dy - y'dx = 0,$$

$$ydy' - F(y')dx = 0$$

に等値である。$\omega_i(A_k)$ の表を標準形にするためには

$$\omega_1 = dx - \frac{x}{y}dy - \frac{y - xy'}{F(y')}dy',$$

$$\omega_2 = \frac{dy}{y} - \frac{y'}{F(y')}dy'$$

ととらなければならない。ここでは

$$A(Bf) - B(Af) = Af$$

であるから，容易に験証されるように，

$$\omega_1' = -[\omega_1\omega_2],$$

$$\omega_2' = 0$$

である。したがって積分は二つの求積

$$y=C_1 e^{\int\frac{y'dy'}{F(y')}},$$

$$x=C_1\int\frac{1}{F(y')}e^{\int\frac{y'dy'}{F(y')}}dy'+C_2$$

で行なわれる。

Ⅳ 拡 張, 例

168. r 個の無限小変換

$$A_1f,\ A_2f,\ \cdots,\ A_rf$$

を許容する n 個の Pfaff 方程式系 (1) の場合には，$\omega_i(A_k)$ の表の階数が r より小であることが起こり得る。(もし $r>n$ ならこれは必らず起こる。) この場合には ρ をこの表の階数とし，最初の ρ 行最初の ρ 列で作った行列式は 0 でないと仮定しよう。これはつねに許されることである。そうすれば指標 s のいかんにかかわらず，

$$\omega_s(A_{\rho+1})=\lambda_{11}\omega_s(A_1)+\cdots+\lambda_{1\rho}\omega_s(A_\rho),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_s(A_r)=\lambda_{r-\rho,1}\omega_s(A_1)+\cdots+\lambda_{r-\rho,\rho}\omega_s(A_\rho)$$

という形の $r-\rho$ 個の関係式を得る。これらの関係式にはいってくる係数 λ_{ij} は第一積分である。実際 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n$ のすべての一次結合 ω に対して，とくに n 個の独立な第一積分の微分 $dy_1,\ \cdots,\ dy_n$ に対して，同様な関係

$$A_{\rho+1}(y_r)=\lambda_{11}A_1(y_s)+\cdots+\lambda_{1\rho}A_\rho(y_s)$$

を得る。これは $\lambda_{11},\ \cdots,\ \lambda_{1\rho}$ に対して，$A_i(y_k)$，すなわち $y_1,\ \cdots,\ y_n$ にのみ関係する値を導く。

この一般の場合の理論をこれ以上追求しないことにする。この理論は上と同様な原理に基くものである。

169. 例Ⅰ. 与えられた曲率半径を有する平面曲線の微分方程式

$$(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=Ry''$$

を考えよう。これは系

$$\omega_1\equiv dy-y'dx=0,$$
$$\omega_2\equiv Rdy'-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}dx=0$$

に等値である。この系は，Ox に平行な並進，Oy に平行な並進，および O の周りの回転に対応する三つの無限小変換を許容する。これらの変換は，x および y に対するその効果に関してのみでなく，y' に対しても計算されなければならない。容易に

$$A_1f=\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$A_2f=\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$A_3f=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}+(1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'}$$

が見いだされる。量 $\omega_i(A_k)$ の表はつぎのとおりである。

$$\left\|\begin{matrix}-y' & 1 & x+yy' \\ -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} & 0 & y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}+R(1+y'^2)\end{matrix}\right\|.$$

したがって

$$\omega_s(A_3)=-\left(y+\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\omega_s(A_1)+\left(x-\frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\omega_s(A_2)$$

を得る。

したがって，単なる微分によって，与えられた系の二つの第一積分を得る。そして一般解は公式

$$x=\frac{Ry'}{\sqrt{1+y'^2}}+C_1,$$

$$y=\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}+C_2,$$

または

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=R^2$$

で与えられる。

170. 例II．一定曲率の平面曲線を定義する三階微分方程式

$$y'''=\frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$$

を考えよう。これは Pfaff 方程式系

$$\omega_1\equiv dy-y'dx=0,$$
$$\omega_2\equiv dy'-y''dx=0,$$
$$\omega_3\equiv dy''-\frac{3y'y''^2}{1+y'^2}dy'=0$$

と等値である。

この Pfaff 方程式系は，Ox に平行な並進，Oy に平行な並進，O のまわりの回転，O を中心とする相似変換の四つに対応する四つの無限小変換を許容する。x，y，y'，y'' に働くと考えられたこれらの変換の記号は

$$A_1f=\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$A_2f=\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$A_3f=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}+(1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'}+3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''},$$
$$A_4f=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}-y''\frac{\partial f}{\partial y''}$$

である。

この場合量 $\omega_i(A_k)$ の表は

$$\left\|\begin{matrix}-y' & 1 & x+yy' & y-xy' \\ -y'' & 0 & 1+y'^2+yy'' & -xy'' \\ 0 & 0 & 0 & -y''\end{matrix}\right\|$$

である。

これは階数 3 である。そしてたとえば第 1，第 2，第 4 列をとって得られる行列式は 0 でない。これから関係

$$\omega_s(A_3) = -\left(y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_1) + \left(x - y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)\omega_s(A_2)$$

が得られる。これから二つの第一積分

$$u = x - y'\frac{1+y'^2}{y''},$$

$$v = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

が導かれる。

積分を続けるために，$\bar{\omega}_i(A_k)$ の表の主行列式がその標準形になるように，一次結合 $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ を選ぼう。そのためには

$$\bar{\omega}_1 = dx - \left(\frac{1}{y''} + \frac{3xy'}{1+y'^2}\right)dy' + x\frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_2 = dy - \left(\frac{y'}{y''} + \frac{3yy'}{1+y'^2}\right)dy' + y\frac{dy''}{y''},$$

$$\bar{\omega}_3 = \frac{3y'dy'}{1+y'^2} - \frac{dy''}{y''}$$

をとらなければならない。

他方

$$du = \bar{\omega}_1 + u\bar{\omega}_3,$$

$$dv = \bar{\omega}_2 + v\bar{\omega}_3,$$

および

$$\bar{\omega}_1{}' = -[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_2{}' = -[\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3],$$

$$\bar{\omega}_3{}' = 0$$

である。

したがって $\bar{\omega}_3$ は一つの完全微分であり，一回の求積によって欠けていた第一積分を得る。与えられた方程式の一般解は，公式

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = C_3,$$

$$x=\frac{C_3 y'}{\sqrt{1+y'^2}}+C_1,$$

$$y=-\frac{C_3}{\sqrt{1+y'^2}}+C_2$$

で与えられる。

ここに，与えられたものをかえない群 G は

$$\bar{C}_1=C_1,\quad \bar{C}_2=C_2,\quad \bar{C}_3=aC_3\ \left(\text{なぜなら}\ \bar{\omega}_3=\frac{dC_3}{C_3}\right)$$

であるのがみられる。ここに a は一つの任意定数である。積分がただ一回の求積に帰着されるのは，この群が一媒介変数であるからである。以上の練習問題においては，群Gが恒等変換に直され，したがって解は積分なしで求められた。

171. 注意. n 個の不変一次形式に達するすべての例においては，$\omega_1, \cdots, \omega_n$ を用いて定数係数の任意の外形式を作ることによって，あらゆる次数の積分不変式を得る。たとえば最後の問題においては積分不変式 $\iiint\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3$ を得る。これは，x の同じ値に対応する状態の集合にのみ制限すれば

$$\iiint\frac{dydy'dy''}{y''^2}$$

となる。

したがって，もし三つの媒介変数に関係する円の任意の集合を考え，この集合に属する円を y 軸への任意の平行線できれば，考えている円の集合にわたる積分 $\iiint\frac{dydy'dy''}{y''^2}$ は x に無関係である。もっともこれは $\iiint\frac{dC_1dC_2dC_3}{C_3}$ に等しい。ただしここに C_1, C_2 は中心の座標を，C_3 は半径を表わすものである。

第 17 章

以上の理論の n 体問題への応用

I　自由度の数をへらすこと

172. われわれはすでに（第123項），第12章で説明した積分法が，力学の正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

に対してはどうなるかをみた。そこでは関数Hは任意であると考えた。もしこの関数が時間に無関係であれば，関数Hは一つの第一積分であり（第92項），われわれは方程式

$$\frac{dq_i}{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}}=\frac{-dp_i}{\dfrac{\partial H}{\partial q_i}}$$

の積分に導かれる。これらの方程式の第一積分は，方程式

$$(Hf)=0$$

であり，したがって一つの求積に導かれる。

173. われわれは，すでに決定された（第93項），運動の方程式が許容するところの無限小変換を考慮に入れて，n 体問題の積分に起こる簡単化をいますこし詳細に調べよう。われわれは，n 個の質点の集まりは，その重心を原点とする座標系に対して表わされている，すなわち $3n$ 個の座標 x_i, y_i, z_i と $3n$ 個の速度の成分 x_i', y_i', z_i' は関係

$$\sum m_i x_i=0, \quad \sum m_i y_i=0, \quad \sum m_i z_i=0,$$

$$\sum m_i x_i'=0,\quad \sum m_i y_i'=0,\quad \sum m_i z_i'=0$$

で結ばれていると仮定する。これは許されることである。

U を，座標に関して斉一 p 次と仮定された力の関数とする。運動の方程式は，つぎの五つの無限小変換を許容する。すなわち

$$A_0 f=\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$A_1 f=\sum\left(y_i\frac{\partial f}{\partial z_i}-z_i\frac{\partial f}{\partial y_i}+y_i'\frac{\partial f}{\partial z_i'}-z_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right),$$

$$A_2 f=\sum\left(z_i\frac{\partial f}{\partial x_i}-x_i\frac{\partial f}{\partial z_i}+z_i'\frac{\partial f}{\partial x_i'}-x_i'\frac{\partial f}{\partial z_i'}\right),$$

$$A_3 f=\sum\left(x_i\frac{\partial f}{\partial y_i}-y_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+x_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'}-y_i'\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right),$$

$$A_4 f=\sum\left[x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial f}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial f}{\partial z_i}-\frac{p}{2}\left(x_i'\frac{\partial f}{\partial x_i'}+y_i'\frac{\partial f}{\partial y_i'}+z_i'\frac{\partial f}{\partial z_i'}\right)\right]$$
$$+\left(1+\frac{p}{2}\right)t\frac{\partial f}{\partial t}.$$

他方

$$\omega'=\sum\{m_i[\delta x_i'\delta x_i]+m_i[\delta y_i'\delta y_i]+m_i[\delta z_i'\delta z_i]\}-[\delta H\delta t]$$

である。ただしここに

$$H=\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)-U$$

とおいた。

174. 五つの不変一次形式

$$\omega_i=\omega'(A_i,\ \delta)$$

は

$$\left|\begin{array}{l}\omega_0=\delta H,\\ \omega_1=\delta H_1,\\ \omega_2=\delta H_2,\end{array}\right.$$

(1)
$$\begin{cases} \omega_3=\delta H_3, \\ \omega_4=-\sum m_i\left(x_i\delta x_i'+y_i\delta y_i'+z_i\delta z_i'+\dfrac{p}{2}x_i'\delta x_i+\dfrac{p}{2}y_i'\delta y_i+\dfrac{p}{2}z_i'\delta z_i\right) \\ \qquad\qquad +\left(1+\dfrac{p}{2}\right)t\delta H+pH\delta t \end{cases}$$

である。ただしここに

(2)
$$\begin{cases} H_1=\sum m_i(y_i'z_i-z_i'y_i), \\ H_2=\sum m_i(z_i'x_i-x_i'z_i), \\ H_3=\sum m_i(x_i'y_i-y_i'x_i) \end{cases}$$

とおいた。

最後にわれわれは

$$\omega_4'=A_4(\omega')=\left(1-\frac{p}{2}\right)\omega'$$

を得る。

量 $a_{ij}=\omega'(A_i, A_j)$ の表は，すでにさらに一般な場合に対して作ってある(第95項)。われわれはこの表をもう一度以下に掲げよう。

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	$-pH$
1	0	0	H_3	$-H_2$	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_1$
2	0	$-H_3$	0	H_1	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_2$
3	0	H_2	$-H_1$	0	$\left(1-\frac{p}{2}\right)H_3$
4	pH	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_1$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_2$	$\left(\frac{p}{2}-1\right)H_3$	0

175. われわれはいまや，五つの不変一次形式と，拡張された Poisson の括弧

$$N[\omega'^{N-1}\omega_i\omega_j]=a_{ij}[\omega'^N]$$

の演算によって定義される係数 a_{ij} の表とを知っている。

第12章の理論（第125項）を応用しよう。補助の形式

$$\Phi(\xi)=\sum_{(ij)}^{0,1,\cdots,4} a_{ij}[\xi_i\xi_j]$$

を作ろう。これは

$$\Phi(\xi)=p\mathrm{H}[\xi_4\xi_0]+\frac{p-2}{2}[\xi_4(\mathrm{H}_1\xi_1+\mathrm{H}_2\xi_2+\mathrm{H}_3\xi_3)]$$
$$+\mathrm{H}_1[\xi_2\xi_3]+\mathrm{H}_2[\xi_3\xi_1]+\mathrm{H}_3[\xi_1\xi_2]$$

と書かれる。

これは階数 4 であり，その正準形

$$\Phi=[\xi_4'\xi_0']+[\xi_1'\xi_2']$$

への変形は

$$\xi_0'=p\mathrm{H}\xi_0+\frac{p-2}{2}(\mathrm{H}_1\xi_1+\mathrm{H}_2\xi_2+\mathrm{H}_3\xi_3),$$
$$\xi_4'=\xi_4,$$
$$\xi_1'=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3,$$
$$\xi_2'=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3,$$
$$\xi_3'=\xi_0$$

とおいて行なわれる。ここに α_i および β_i は

$$\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3=\mathrm{H}_1,\quad \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3=\mathrm{H}_2,\quad \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2=\mathrm{H}_3$$

となるように選ばれているものとする。これはつねに可能である。

われわれはさらに付加的な条件

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0,$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=\sqrt{\mathrm{H}_1^2+\mathrm{H}_2^2+\mathrm{H}_3^2}$$

をつけ加えることができる。

さて，五つの一次形式 $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ を恒等式

$$\xi_0\omega_0+\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2+\xi_3\omega_3+\xi_4\omega_4=\xi_0'\pi_0+\xi_1'\pi_1+\xi_2'\pi_2+\xi_3'\pi_3+\xi_4'\pi_4$$

で定義すれば，容易に

$$\pi_4=\omega_4,$$
$$\pi_0=\frac{2}{p-2}\frac{\mathrm{H}_1d\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2d\mathrm{H}_2+\mathrm{H}_3d\mathrm{H}_3}{\mathrm{H}_1^2+\mathrm{H}_2^2+\mathrm{H}_3^2},$$

$$\pi_3 = dH - \frac{2pH}{p-2}\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2},$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha_1 dH_1 + \alpha_2 dH_2 + \alpha_3 dH_3}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}},$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_1 dH_1 + \beta_2 dH_2 + \beta_3 dH_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}}$$

を得る。

補助形式 Φ は $[\xi_4'\xi_0'] + [\xi_1'\xi_2']$ と直されているから，われわれは

$$\omega' = [\pi_4\pi_0] + [\pi_1\pi_2] + [\omega_5\pi_3] + [\omega_6\omega_7] + \cdots,$$

すなわち計算を行なえば

(3)
$$\begin{cases} \omega' = \dfrac{2}{p-2}\left[\omega_4 \dfrac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right] \\ \qquad + \dfrac{H_1[dH_2dH_3] + H_2[dH_3dH_1] + H_3[dH_1dH_2]}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2} + \Omega \end{cases}$$

を得る。ただしここに

(4)
$$\Omega = \left[\omega_5\left(dH - \frac{2pH}{p-2}\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\right)\right] + [\omega_6\omega_7] + \cdots$$

とおいた。

176. もし，四つの第一積分 H, H_1, H_2, H_3 を任意定数に等しいとおけば，ω' の階数は 6 だけ減ずる。したがって階数は $6n-6$ から $6n-12$ に減ずる。したがってこれは自由度 $3n-6$（三体問題の場合には 3 である）の問題に対応する。しかしながら対応する特性系は任意定数を含んでいる。

任意媒介変数の導入をさけて，自由度の数を減少させる（理論的な）方法が存在する。方程式 (3) の右辺の外微分を 0 とおき，関係式

$$\omega_4' = \frac{2-p}{2}\omega'$$

を考慮に入れてわれわれは

$$\Omega' = \left[\frac{H_1dH_1 + H_2dH_2 + H_3dH_3}{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\Omega\right]$$

を得る。

この関係式は，二次形式

$$\frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\Omega=\frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\omega'-\frac{2}{p-2}\left[\omega_4\frac{H_1dH_1+H_2dH_2+H_3dH_3}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$-\frac{H_1[dH_2dH_3]+H_2[dH_3dH_1]+H_3[dH_1dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2}{2-p}\left(\frac{1}{\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}}\omega_4\right)'$$

$$-\frac{H_1[dH_2dH_3]+H_2[dH_3dH_1]+H_3[dH_1dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

の外微分が 0 であることを示している。もっともこの性質は，上の等式の最右辺において明らかにされる。その第一項は完全外微分であるから，その外微分は 0 である。われわれは第二項の外微分も 0 であることを示そう。

この第二項を解釈するために，長さ $r=\sqrt{H_1^2+H_2^2+H_3^2}$ のベクトル（OS）を考えよう。これはこの系の原点に関する運動量能率を表わし，射影として H_1, H_2, H_3 をもっている。もし点 S の描く面素 $d\sigma$ を想像し，この面素への法線の方向余弦を α_1, α_2, α_3 とよべば，

$$[dH_2dH_3]=\alpha_1 d\sigma,\quad [dH_3dH_1]=\alpha_2 d\sigma,\quad [dH_1dH_2]=\alpha_3 d\sigma,$$

したがって

$$\frac{H_1[dH_2dH_3]+H_2[dH_3dH_1]+H_3[dH_1dH_2]}{(H_1^2+H_2^2+H_3^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\alpha_1H_1+\alpha_2H_2+\alpha_3H_3}{r^3}d\sigma$$

$$=\frac{\cos\psi d\sigma}{r^2}=d\omega$$

を得る。ただしここに ψ は，OS と面素への法線のなす角，$d\omega$ はこの面素を原点からみる立体角を表わす。他方 θ および φ で S の余緯度（Oz との角）および経度（平面 zOS と平面 xOz のなす角）を表わせば，

$$d\omega=\sin\theta[d\theta d\varphi]$$

を得る。したがって考えている形式は，一次形式 $-\cos\theta d\varphi$ の外微分とみなし得られる。

そこで

(5) $$\pi=\frac{2}{2-p}\frac{\omega_4}{r}+\cos\theta d\varphi$$

とおこう。そうすれば相対積分不変式 $\int\pi$ の特性方程式は

(6) $$\begin{cases} dH-\dfrac{2p}{p-2}H\dfrac{dr}{r}=0, \\ \omega_5=0,\ \omega_6=0,\ \omega_7=0,\ \cdots \end{cases}$$

であるのがみられる。

II 動座標系に関して表わされた運動方程式

177. この Pfaff 系を解釈することは容易である。考えを定めるために天体力学の三体問題の場合を取りあげよう ($p=1$)。まず量 $\omega_5(A_i)$, $\omega_6(A_i)$ 等を計算しよう。そのために，公式 (3) の両辺に，$A_i f$ に対応する演算を施そう。しかし dH, ω_6, ω_7, $\cdots$, ω_{11} の項だけを書こう。われわれは直ちに

$$dH=\omega_5(A_0)dH-\omega_7(A_0)\omega_6+\omega_6(A_0)\omega_7+\cdots+\omega_{10}(A_0)\omega_{11},$$
$$0=\omega_5(A_1)dH-\omega_7(A_1)\omega_6+\omega_6(A_1)\omega_7+\cdots+\omega_{10}(A_1)\omega_{11},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0=\omega_5(A_4)dH-\omega_7(A_4)\omega_6+\omega_6(A_4)\omega_7+\cdots+\omega_{10}(A_4)\omega_{11}$$

を得る。こうして $\alpha\geqq5$ に対しては，1に等しい $\omega_5(A_0)$ を除いては，すべての $\omega_\alpha(A_i)$ が0であるのが見いだされる。

他方，関数 $K=Hr^2$ は考えている無限小変換のおのおのに対して不変であるから，量 $A_iH+2H\dfrac{A_ir}{r}$ はすべて0であることに注意しよう。$\dfrac{1}{r}\Omega$ の特性系 (6) は，不定の微分記号を無限小変換 A_1f, A_2f, A_3f, A_4f の任意の一つの記号でおきかえれば恒等的に満足されるという性質をもった，運動方程式のあらゆる一次結合で作られたものと定義し得るのがみられる。

178. Pfaff 系 (6) の幾何学的解釈を可能にするのはこの性質である。

そのために，可能な種々の座標系を考えよう。各座標系は，三つの直角座標軸，時間の原点，および長さ，時間，質量の単位で定義される。われわれは質量の単位を一度定めてこれをかえない。そして他の単位に対しては，万有引力定数が一定の数値をもつという条件をおく。長さの単位はなお任意である。最後にわれわれは，軸の原点を三つの物体の重心に定め，同時に時間の原点を定める。

われわれの使うことのできる座標は四つの任意の媒介変数に関係する。そのうちの三つは軸の方向を定め，第四番目の媒介変数は単位を定める。

三つの物体の（その位置，その速度，および時間によって定義され，13個の変数に関係する）各状態に，前もって定められた一定の規則にしたがって，一つの動座標系を，この座標系に対する三つの物体の状態を定める量の数を4つだけ減ずるように対応させることができる。たとえば，x 軸としては重心Oを物体 A_1 に結ぶ直線を，xy 平面としては三つの物体を含む平面を，そして長さの単位としては距離 OA_1 を選ぶことができよう。そうすれば，三つの物体の状態は，A_2 の二つの座標と，A_1 および A_2 の速度の三つの軸への六つの射影と，最後に時間 t とで定義される。与えられた状態に対応して，動座標系の選択を他の規則で定めることもできよう。前と同様 Oz を三つの物体を含む平面に垂直にとり，Ox を A_1A_2 に平行にとり，長さの単位として辺 A_1A_2 をとることもできよう。さらにまた，軸は上の二つの規則のいずれかにしたがってとるが，諸単位を運動量能率 OS が数1で測られるようにとることもできよう。さらにまた，Oz を三つの物体の平面に垂直にとり，xz 平面を平面 zOS にとり，OS が数1で測られるように単位をとることもできよう。この最後の仮定のもとでは，動座標系に関する三つの物体の状態を決定する9つの量は，A_1 の二つの座標，A_2 の二つの座標，時間，そして最後に A_1 および A_2 の6つの速度成分となるであろう。これらは全体で11個の量となるが，二つの関係式 $r=1$，$\varphi=0$ で結ばれている。

さて，三つの物体の各状態に一つの動座標系を対応させるために，上の法則のどれか一つ，または想像し得る他のいかなる法則でも，これを一つ選んだと考えよう。そして

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_9$$

を，三つの物体の対応する動座標系に関する状態を決定する9つの量としよう。三つの物体の状態は，もし $q_1, q_2, \cdots, q_9$ の他に，動座標系の定座標系に関する位置を定義する4つの媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 を知れば決定される。これら4つの媒介変数は，たとえば9つの方向余弦がそれに関係する3つの媒介変数と，動く長さの単位の，定まった長さの単位に対する比であり得る。最後に三つの物体の定座標系に対する状態を定める量（数は19個であるが，しかし13個に帰着する）

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ x_i',\ y_i',\ z_i',\ t$$

は，13個の量

$$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_9;\ \ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$$

の定まった関数である。逆にこれらの量は，前者の定まった関数である。さて $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', t$ の関数と考えられた9つの量 $q_1, q_2, \cdots, q_9$ は明らかに，無限小変換 $A_1f, \cdots, A_4f$ のおのおのによって不変である。なぜなら，これらの変換の一つを施こすということは，定座標軸を変える，したがって動座標系と定座標系の間の関係を定義する量 u_1, u_2, u_3, u_4 を変えるが，三つの物体の動座標系に関する状態を定義する量 q_i を変えない，ということを意味するからである。

さらに，もし記号 d を記号 $A_1f, \cdots, A_4f$ のいずれか一つでおきかえた場合に0になるという性質をもつ，すべての $dx_i, dy_i, dz_i, \cdots, dz_i', dt$ の一次微分形式をさがすならば，$dq_1, \cdots, dq_9$ のあらゆる一次結合が見いだされ，しかもこれらに限る，とも言うことができる。

とくに Ω の特性系の方程式 (6) は，$dq_1, \cdots, dq_9$ に関して一次な左辺をもっている。これらの数は8つであるから，これらの方程式 (6) は

$$dq_i - C_i dq_9 = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, 8)$$

の形に書かれ得る。しかもこれらは完全積分可能であるから，C_i は q_i にしか関係しない。言いかえると，特性系 (6) は $q_1, \cdots, q_9$ に関する一つの常微分方程式系である。したがってこれは動座標系に関する三つの物体の運動を定義する。

179. さて，実際に特性系 (6) の方程式をつくることは容易である。そのために相対積分不変式 $\int\pi$ から出発しよう。ただしわれわれはここに

$$\pi = \frac{2}{\gamma}\omega_4 + \cos\theta d\varphi$$

とおいた。そしてすべての量 $x_i, y_i, \cdots, z_i', t$ を $q_1, \cdots, q_9, u_1, \cdots, u_4$ を用いて書き表わしたものと想像しよう。まずわれわれは，微分 du_1, du_2, du_3, du_4 は π' の最後の形にはいってきてはいけないことを知っている。π' は一次形式 $dq_i - C_i dq_9$ のみを用いて作られているべきである。したがってわれわれは，π' を計算するために u_1, u_2, u_3, u_4 を定媒介変数とみなすことができる。さらに $dq_1, \cdots, dq_9$ を用いて表わされた形式 π' の係数は，変数 u_1, u_2, u_3, u_4 を含んでいてはならない。もし含んでいるとすれば，π' の外微分は 0 となり得ないからである。したがって計算を行なうためには，u_1, u_2, u_3, u_4 を定媒介変数とみなし得るばかりでなく，これらに任意の数値を与えることができる。したがってとくにこれらに，定座標系と動座標系とが一致する場合に対応する数値を与えることができる。言いかえれば，π' を作るためには，π において，量 $x_i, y_i, \cdots, z_i', t$ に，動座標系に対する三つの物体の状態を定義する値 $X_i, Y_i, \cdots, Z_i', T$ を与えることができる。これら13個の量 $X_i, \cdots, T$ は，すでにみたように 9 個に帰着される。

180. とくに動く長さの単位を，γ が 1 になるように選んだ（したがって動く長さの単位は一定である）場合を調べよう。この場合には

$$\pi=2\omega_4+\cos\theta d\varphi$$

である。一つの完全微分を加えることによって，求める微分方程式に対して相対積分不変式 $\int\omega+\cos\theta d\varphi$ を得る。

z 軸は三つの物体の平面に垂直であり，x 軸はたとえば A_1A_2 に平行であると仮定すれば，三角形の位置は3つのの量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に関係する。さて

$$\omega+\cos\theta d\varphi=\sum m_i(X_i'dX_i+Y_i'dY_i)-HdT+\cos\theta d\varphi$$
$$=\eta_1 d\xi_1+\eta_2 d\xi_2+\eta_3 d\xi_3+\eta_4 d\xi_4-HdT$$

である。ただしここに

$$\xi_4=\varphi,\quad \eta_4=\cos\theta$$

とおいた。したがって求める相対運動の方程式は

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\quad \frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i}\qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

である。これらは正準形である。したがって第一積分 H＝定数を許容する。

たとえば ξ_1, ξ_2, ξ_3 として三角形 $A_1A_2A_3$ の三辺の長さをとることができよう。

もし運動が平面運動であるとすれば，θ は0で，6つの未知関数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ しかないことになる。

181. 三つの物体の動座標系に関する運動が一度知られたならば，絶対運動は一つの求積によって定められる。実際，まず，運動量能率 OS の動座標軸上への射影が知れているのであるから，定座標系に関して OS を測る定数 C を与えることによって，動く単位の一定の単位に対する比を得る。そうすれば OS を定 z 軸としてとることができる。そして定座標軸の位置は一つの未知の角に関係する。この角は一つの求積で求められる。事実それには，（定座標を用いて表わされた）不変形式 ω_4 は，相対運動を定義するすでに得られたと考えられた関係式を考慮に入れれば一つの完全微分であることに注意すればよい。実際公式

$$2\omega_4' = \omega' = 2\left[\frac{dr}{r}\omega_4\right] + \frac{H_1[dH_2 dH_3] + H_2[dH_3 dH_1] + H_3[dH_1 dH_2]}{r^2} + \Omega$$

は，上の条件のもとに ω_4' が0であることを示しているからである。(H_1 と H_2 も0である。) したがって積分は，公式

$$\int \omega_4 = \text{定数}$$

を用いて完了される。

(すでに知っているように一つの求積によって) 時間を見いだす以前に，幾何学的な見地だけから相対運動を決定すれば，この求積ができることに注意することができる。言いかえれば，(相対運動における) 時間と，動座標系に関して定座標系を定義する向きを与える二つの求積は，互いに独立に行なわれ得る。

III　面積定数がすべて0である場合

182. 以上の理論は，本質的に $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 \neq 0$ であることを仮定している。面積定数が三つとも0である運動を研究しよう。この場合には，18個の量

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ x_i',\ y_i',\ z_i'$$

は，関係

$$\sum m_i x_i = 0, \quad \sum m_i y_i = 0, \quad \sum m_i z_i = 0,$$
$$\sum m_i x_i' = 0, \quad \sum m_i y_i' = 0, \quad \sum m_i z_i' = 0$$

で結ばれているばかりでなく，さらに関係

$$\sum m_i(y_i' z_i - z_i' y_i) = 0, \quad \sum m_i(z_i' x_i - x_i' z_i) = 0, \quad \sum m_i(x_i' y_i - y_i' x_i) = 0$$

でも結ばれていると考えなければならない。

三つの物体の作る三角形の平面は一定であることは容易にみられる。なぜなら，もし少なくも三つの物体が一直線上にないとすれば，この平面に垂直な三つの速度の成分は全部0になるからである。

したがってわれわれは，z_i と z_i' はすべて0であると仮定することができる。

したがって12個の量 x_i, y_i, x_i', y_i' の間に五つの関係式

$$\sum m_i x_i=0,\quad \sum m_i y_i=0,$$
$$\sum m_i x_i'=0,\quad \sum m_i y_i'=0,$$
$$\sum m_i(x_i' y_i-y_i' x_i)=0$$

のみが残る。

したがって全部で七つの従属変数と一つの独立変数（時間）とがあるわけである。さて，偶数階数である ω' は，運動の微分方程式の数に等しい階数のものではあり得ない。したがって ω' の特性系は運動方程式の特性系と一致しない。

われわれはここに，

$$\omega'(\mathrm{A}_0,\delta)=\delta\mathrm{H},\quad \omega'(\mathrm{A}_3,\delta)=0,\quad \omega'(\mathrm{A}_4,\delta)=\omega_4$$

を満足する三つの無限小変換 $\mathrm{A}_0 f$, $\mathrm{A}_3 f$, $\mathrm{A}_4 f$ をもっている。運動の七つの微分方程式は，

$$\pi_1=0,\ \pi_2=0,\ \cdots,\ \pi_7=0$$

という Pfaff の方程式の形におかれ得る。そしてわれわれは

$$\pi_1(\mathrm{A}_3)=\cdots=\pi_6(\mathrm{A}_3)=0,\quad \pi_7(\mathrm{A}_3)=1$$

と仮定し得る。$\pi_1,\cdots,\pi_7$ を用いて表わし得る形式 ω' は，確かに π_7 を含んでいない。もし含むとすれば，形式 $\omega'(\mathrm{A}_3,\delta)$ は恒等的に 0 とはなり得ないからである。したがって ω' の特性系は，完全積分可能系

$$\pi_1=\pi_2=\cdots=\pi_6=0$$

である。これは，三つの物体の三角形のその重心のまわりの向きとは独立に，三つの物体の運動を与える。この Pfaff 系が一度積分されれば，向きは一つの求積によって与えられる。事実関係式 $\pi_7(\mathrm{A}_3)=1$ は，π_7 が微分方程式 $\pi_7=0$ に対する一つの不変形式であるという性質を保証しているからである。

こんどは階数 6 の形式 ω' にもどろう。その特性系は二つの無限小変換 $\mathrm{A}_0 f$ および $\mathrm{A}_4 f$ を許容するが，これらはさらに二つの不変一次形式 $\omega_0=\delta\mathrm{H}$ および ω_4 を生む。われわれは $\omega_0=\delta\mathrm{H}$ を π_1 で，ω_4 を π_2 で示そう。われわれは形式 π_3, π_4, π_5, π_6 のおのおのに対して $\pi(\mathrm{A}_0)=\pi(\mathrm{A}_4)=0$ であると仮定しよう。

これは許されることである。一般の場合に行なったそれと類似な計算によって

$$\omega' = -\frac{1}{\mathrm{H}}[\pi_1\pi_2] + \Omega = -\frac{1}{\mathrm{H}}[\delta\mathrm{H}\pi_2] + \Omega$$

が与えられる。ただしここに Ω は階数 4 であって，π_3，π_4，π_5，π_6 によって作られている。

上にみたように $\omega' = 2\omega_4' = 2\pi_2'$ である。したがって

$$\Omega = 2\pi_2' + \left[\frac{\delta\mathrm{H}}{\mathrm{H}}\pi_2\right] = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{H}}}(\sqrt{\mathrm{H}}\pi_2)'$$

である。

したがって形式 $\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{H}}\Omega$ は一つの完全微分である。したがってこれは特性系として，方程式

(7)　$$\pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = 0$$

を許容する。この系は

4，2，0

次の演算によって積分される。

結局運動の方程式は，4 次および 2 次の演算と二つの求積とによって与えられる。

Pfaff 系 (7) に対して相対不変式の役割を演ずる形式 $\sqrt{\mathrm{H}}\pi_2$ は，$\omega_4 = \pi_2$ の式 (1) によれば，

$$\sqrt{\mathrm{H}}\pi_2 = -\sqrt{\mathrm{H}}\sum m_i\left(x_i\delta x_i' + y_i\delta y_i' + \frac{1}{2}x_i'\delta x_i + \frac{1}{2}y_i'\delta y_i\right) + \delta(\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}t)$$

に等しい。

Pfaff 系 (7) を積分するのは容易である。これは，一定の規則にしたがって，三つの物体の各状態に対応せしめ得る一つの動座標系に関する，三つの物体の運動を与える。ここに時間の原点は必ずしも一定でなくともよい。

たとえば時間の動原点として現在の瞬間を選ぶこともできる。そして長さの単位を，エネルギー H が与えられた一定の数値をもつという条件で定めることができる。この系の方程式は，動座標を介入させた形式 $\sqrt{\mathrm{H}}\pi_2$ から出発して

得られる。上に考えた条件のもとでは，これを明らかに形式

$$\sum m_i(x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i)$$

でおきかえることができる。

ここに三つの物体の運動量は，0と同等なベクトル系を作る。したがって物体 A_i の運動量を，辺 A_iA_k および A_iA_j にそい，A_kA_i および A_jA_i の延長の向きに正に数えた二つのベクトル u_j および u_k の和とみなすことができる。したがって，三角形の三辺を r_1, r_2, r_3 で表わせば

$$\omega=u_1\delta r_1+u_2\delta r_2+u_3\delta r_3$$

を得る。

さらに

$$\mathrm{H}=\frac{1}{2m_1}\left(u_2^2+u_3^2+u_2u_3\frac{r_2^2+r_3^2-r_1^2}{r_2r_3}\right)+\cdots-f\left(\frac{m_2m_3}{r_1}+\frac{m_3m_1}{r_2}+\frac{m_1m_2}{r_3}\right)=h$$

を得る。

したがって相対運動の方程式は

$$\frac{dr_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_1}}=\frac{dr_2}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_2}}=\frac{dr_3}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u_3}}=\frac{-du_1}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_1}}=\frac{-du_2}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_2}}=\frac{-du_3}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial r_3}}$$

である。

IV エネルギーの定数が0である場合

183. 以上の理論は，エネルギーの定数が0でないことを暗々裡に仮定している。もしこれが0であると仮定すれば，変数は一つの新しい関係式

$$\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2+y_i'^2)-\mathrm{U}=0$$

で縛られる。この場合には六つの従属変数と一つの独立変数しかない。ここに不変形式 $\omega'(\mathrm{A}_0, \delta)$ は恒等的に0である。形式 $\omega'(\mathrm{A}_3, \delta)$ に対しても同様である。

運動の方程式系は

$$\pi_1=\pi_2=\cdots=\pi_6=0$$

の形におかれ得る。そして

$$\pi_1(A_0)=\pi_2(A_0)=\cdots=\pi_4(A_0)=0,\ \ \pi_5(A_0)=1,\ \ \pi_6(A_0)=0,$$

$$\pi_1(A_3)=\pi_2(A_3)=\cdots=\pi_4(A_3)=0,\ \ \pi_5(A_3)=0,\ \ \pi_6(A_3)=1$$

と仮定することができる（第163項）。

π_i を用いて表わされた形式 ω' は，明らかに π_5 も π_6 も含まない。最後に

$$\pi_2(A_4)=\pi_3(A_4)=\pi_4(A_4)=0,\quad \pi_1(A_4)=1$$

および $\omega'(A_4,\delta)=\pi_2$ と仮定しよう。そうすればわれわれは

$$\omega'=2\pi_2'=[\pi_1\pi_2]+[\pi_3\pi_4]$$

を得る。

形式 π_2 は第二の型であり，方程式

$$\pi_2=\pi_3=\pi_4=0$$

は，方程式 $\pi_2=0$ の特性系である，完全積分可能な Pfaff 系を形成する。これは，三つの物体の動座標系に関する運動を定義するものである。ただし時間の原点は変わり得る。ここに，たとえば三角形の辺 r_3 を長さの単位として選んだと仮定することができる。そうすれば積分すべき方程式は，Pfaff の方程式

$$2d(u_1r_1+u_2r_2+u_3)-u_1dr_1-u_2dr_2=0$$

の特性系を形成する。ただしここに量 u_1, u_2, u_3, r_1, r_2 は，関係式

$$\frac{1}{2m_1}(u_2^2+u_3^2+2u_2u_3\cos A_1)+\cdots-f\left(\frac{m_2m_3}{r_1}+\frac{m_3m_1}{r_2}+m_1m_2\right)=0$$

で結ばれている。

$$r_1=x,\ \ r_2=y,\ \ u_1r_1+u_2r_2+u_3=z,\ \ u_1=2p,\ \ u_2=2q$$

とおけば，一階偏微分方程式

$$2\left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)p^2+2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_3}\right)q^2+\frac{2}{m_3}\,\frac{x^2+y^2-1}{xy}pq$$

$$+(z-2px-2qy)\left(\frac{p}{m_2}\,\frac{x^2+1-y^2}{x}+\frac{q}{m_1}\,\frac{y^2+1-x^2}{y}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(z-2px-2qy)^2-f\left(\frac{m_2m_3}{x}+\frac{m_1m_3}{y}+m_1m_2\right)=0$$

の積分に導かれる。

この方程式が積分されれば，われわれは微分によって，ω' の特性系の一般解を得る。なぜなら，π_2 が $Z_1dY_1+Z_2dY_2$ の形におかれていれば，われわれはこれから微分によってこの系の第一積分 Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 を得るからである。

しかしながら運動の方程式は，いまだ完全には積分されてはいない。さらに方程式

$$\pi_5=\pi_6=0$$

を積分しなければならない。

これらは，二つの無限小変換 A_0f および A_3f を許容する微分方程式系を形成する。そして表

$$\left\|\begin{matrix}\pi_5(A_0) & \pi_5(A_3)\\ \pi_6(A_0) & \pi_6(A_3)\end{matrix}\right\|$$

は，ちょうどその正準形

$$\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|$$

に直されている。他方

$$A_0(A_3f)-A_3(A_0f)=0$$

であるから，二つの変換 A_0f, A_3f は互いに変換可能である。したがってわれわれは

$$\pi_5'=0,$$

$$\pi_6'=0$$

を得る。したがって積分は二つの独立な求積によって遂行される。その一方は三角形 $A_1A_2A_3$ の向きを与え，他方は時間を与える。

第 18 章

積分不変式と変分法

I　相対積分不変式に結びつけられた極値

184. われわれはすでに第1章において（第9項），積分

$$I=\int F(q_1,\ \cdots,\ q_n;\ q_1',\ \cdots,\ q_n';\ t)dt$$

の極値曲線の微分方程式は，

$$\omega=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial F}{\partial q_i'}\delta q_i-\left(\sum_{i=1}^{i=n}q_i'\frac{\partial F}{\partial q_i'}-F\right)\delta t$$

とおいた場合の相対積分不変式 $\int\omega$ の特性方程式と一致することをみた。ただしここに $q_1,\ \cdots,\ q_n,\ q_1',\ \cdots,\ q_n',\ t$ は $2n+1$ 個の独立な変数とみなされる。

変分法においては，$q_1,\ \cdots,\ q_n$ を t の任意の関数，$q_1',\ \cdots,\ q_n'$ をその微分とみなす。$n+1$ 次元の空間（$q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t$）において，すべての極値曲線は，この曲線によって決定される弧にそっての積分 I が，これと同じ始点同じ終点をもつ無限に近い曲線弧に対して定常であるという性質をもっている。しかしながらわれわれは，$2n+1$ 次元の空間（$q_1,\ \cdots,\ q_n,\ q_1',\ \cdots,\ q_n',\ t$）にいるとも考えることができる。この場合極値曲線は，この曲線によって定められる弧にそっての積分 I が，座標 $q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t$ のみの初期の値と終りの値が与えられた極値曲線に対するものと同じであるような，無限に近い曲線に対して定常であるという性質をもっている。この第二の見地をとるならば，$q_1',\ \cdots,\ q_n'$ は t の関数であって，先験的には $q_1,\ \cdots,\ q_n$ の t に関する微分とはなんの関係もない。

185. さらに一般に，$2n+1$ 個の変数をもった一次微分形式 ω から出発しよ

う。そして形式 ω' は階数 $2n$ であると想像しよう。さらに最後に，ω における微分の係数のうち n 個は恒等的に 0 であると仮定しよう。そうすればわれわれは

$$\omega=a_1\delta x_1+a_2\delta x_2+\cdots+a_n\delta x_n-b\delta t$$

とおくことができる。ここに量 $a_1, \cdots, a_n, b$ は $2n+1$ 個の独立変数 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, t$ の関数である。

相対積分不変式 ω の特性曲線，または同じことであるが，外二次形式 ω' の特性曲線は，常微分方程式系

$$\frac{dx_i}{dt}=\mathrm{X}_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=\mathrm{Y}_i \tag{1}$$

で与えられる。ただしここに t は特性方程式の第一積分ではないと仮定する。また今後もこのように仮定する。

さて $2n+1$ 次元の空間において，点 $\mathrm{M}_0(x_i^0, y_i^0, t^0)$ から点 $\mathrm{M}_1(x_i^1, y_i^1, t^1)$ へいく曲線と，積分

$$\mathrm{I}=\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}a_1dx_1+a_2dx_2+\cdots-bdt$$

を考えよう。考えている曲線弧から，これに無限に近い，点 $(x_i^0+\delta x_i^0, y_i^0+\delta y_i^0, t^0+\delta t^0)$ から点 $(x_i^1+\delta x_i^1, y_i^1+\delta y_i^1, t^1+\delta t^1)$ へいく曲線弧へ移った場合の，この積分の変分を考えよう。われわれは

$$\delta\mathrm{I}=[\omega_\delta]_0^1+\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}(\delta\omega_d-d\omega_\delta)=[\omega_\delta]_0^1-\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}\omega'(d,\delta)$$

を得る。

もしこの積分が，与えられた曲線弧に無限に近いすべての曲線弧に対して定常であることを望むならば，与えられた曲線弧上で，$\delta x_i, \delta y_i, \delta t$ のいかんにかかわらず

$$\omega'(d,\delta)=0$$

でなければならない。言いかえれば，曲線弧は形式 ω' の特性曲線に属する曲線弧でなければならない。積分の値は，ω_δ が始点および終点で 0 となるよう

な，すなわち $x_1, \cdots, x_n, t$ が与えられた曲線弧に対すると同じ初期の値および終りの値をもつような無限に近いすべての曲線弧に対して定常である。

186. こんどは，与えられた曲線に無限に近い曲線の群を，t の関数 x_i, y_i が，最初の n 個の特性方程式

$$\frac{dx_i}{dt}=\mathrm{X}_i$$

を満足するものに限ったと想像しよう。われわれは n 個の関数 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ が $y_1, \cdots, y_n$ に関して独立であることを認めよう。これによれば，x_i を t の任意の関数としてとることができる。最後にわれわれは，$x_1, \cdots, x_n, t$ の初期の値と終りの値が，変化した曲線に対しても，もとの曲線に対しても同一であると仮定する。これらの条件のもとでわれわれは

$$\delta \mathrm{I}=-\int \omega'(d, \delta)$$

を得る。$\omega'(d, \delta)$ 中には $\delta y_1, \delta y_2, \cdots, \delta y_n$ に関する項は一つもないことが容易にみられる。事実 δy_1 の係数は

$$\frac{\partial a_1}{\partial y_1}dx_1+\frac{\partial a_2}{\partial y_1}dx_2+\cdots+\frac{\partial a_n}{\partial y_1}dx_n-\frac{\partial b}{\partial y_1}dt$$

である。この係数は，特性方程式 (1) を考慮に入れれば，したがって方程式 (2) を考慮に入れれば，必然的に 0 となる。したがってこれは極値曲線上では 0 となる。$\delta\mathrm{I}$ の式中には，積分記号 $\int$ 内に $\delta x_1, \cdots, \delta x_n, \delta t$ しかはいってこないのであるから，$\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_n, \delta t$ の係数は 0 でなければならない。したがって極値曲線は ω' の特性方程式で与えられる。

II　Maupertuis の最小作用の原理

187. Hamilton の関数 H は時間に無関係であると仮定しよう。関数 H が与えられた定数値 h をもつような運動の集まりを考えよう。対応する軌道は，

$$\omega=\sum_{i=1}^{i=n} y_i\delta q_i-h\delta t$$

とおくときの，相対積分不変式 $\int\omega$ の特性曲線，または同じことであるが，

$$\pi=\sum_{i=1}^{i=n} p_i\delta q_i$$

とおくときの積分不変式 $\int\pi$ の特性曲線である。事実形式 π は形式 ω と一つの完全微分でしか違わない。この形式 π は，関係

$$\mathrm{H}=h$$

で結ばれた $2n$ 個の変数で作られており，その係数のうちの n 個のみが 0 でない。特性方程式は

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dq_n}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}}=\frac{-dp_1}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}}=\cdots=\frac{-dp_n}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_n}}$$

である。

したがって，$2n-1$ 次元の空間 $(q_i,\ p_i)$ における軌道は，$q_1,\ \cdots,\ q_n$ の初期の値と終りの値の与えられたすべての曲線を考えるにしても，方程式

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}}=\cdots=\frac{dq_n}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n}}$$

を満足する，そしてもちろん条件 $\mathrm{H}=h$ を満足する曲線のみを考えるにしても，積分

$$\int p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n$$

の極値曲線である。

188. たとえば第二の見地に立とう。そして，p_i は運動量の成分であって，q_i はこの系の位置を表わす媒介変数であると仮定しよう。もし $2\mathrm{T}$ でエネルギーを表わし，これを $q_1',\ \cdots,\ q_n'$ に関して二次の項，一次の項，0 次の項に分解すれば，われわれは

$$H=\sum q_i'\frac{\partial T}{\partial q_i'}-T-U=T_2-T_0-U$$

を得る。変数 p_i を変数 q_i でおきかえよう。そうすればわれわれは，仮定によって

$$T_2(q')=T_0+U+h,$$

$$\pi=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T}{\partial q_i'}\delta q_i=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial T_2}{\partial q_i'}\delta q_i+T_1(\delta q_i)$$

を得る。最後に

$$\frac{dq_1}{q_1'}=\frac{dq_2}{q_2'}=\cdots=\frac{dq_n}{q_n'}=\frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_2(q')}}=\frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0+U+h}}$$

であると仮定しよう。

積分 I における記号 $\int$ 内の量は

$$\pi_d=\sum q_i'\frac{\partial T_2}{\partial q_i'}\cdot\frac{\sqrt{T_2(dq)}}{\sqrt{T_0+U+h}}+T_1(dq)=\sqrt{2(T_0+U+h)\cdot 2T_2(dq)}+T_1(dq)$$

である。

したがってもし

$$2T=\sum a_{ij}q_i'q_j'+2\sum b_iq_i'+2T_0$$

とおけば，Maupertuis の意味における最小作用の原理をなすつぎの定理に達する。

軌道は，この系の同じ初期の位置および同じ終りの位置に対応すべき，また与えられたエネルギーの定数をもったエネルギーの定理 $H=h$ を満足すべき，すべての近い軌道に対する，積分

$$\int\left(\sqrt{2(T_0+U+h)\cdot\sum a_{ij}dq_idq_j}+\sum b_idq_i\right)$$

の極値曲線である。

$T_1=T_0=0$ であれば，古典的な形での原理を得る。

189. 例．定座標軸に対して表わされた一つの自由質点の場合には，軌道は積分

$$\int\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\,ds$$

の極値曲線である。もし質点が，一定の角速度 α をもって $\mathrm{O}z$ のまわりに回転する座標軸に対して表わされ，さらに時間に無関係な力の場が軸とともに起こされるとすれば，われわれは

$$\begin{aligned}2\mathrm{T}&=m[(x'+\alpha y)^2+(y'-\alpha x)^2+z'^2]\\&=m(x'^2+y'^2+z'^2)-2m\alpha(xy'-yx')+m\alpha^2(x^2+y^2)\end{aligned}$$

を得る。

質量1の質点に対しては，軌道は積分

$$\int\sqrt{\alpha^2(x^2+y^2)+2\mathrm{U}+2h}\,ds-\alpha(xdy-ydx)$$

の極値曲線である。

III 拡　　張

190. 時間が明示的にはHのなかにはいってこない場合に対して上に行なったことは，H が他の変数 q_i および p_i の一つを含まない場合にも行ない得る。考えを定めるために，距離の関数である中心力を受けている，質量1の自由質点の場合をとろう。われわれが xy 平面にとるところの与えられた平面内で起こり，与えられた定数Cをもって面積定理を満足するすべての運動を考えよう。実際の運動は，相対積分不変式

$$\int\omega=\int\left[r'\delta r+r^2\theta'\delta\theta-\left(\frac{1}{2}r'^2+\frac{1}{2}r^2\theta'^2-\mathrm{U}\right)\right]\delta t$$

を許容する微分方程式系で与えられる。この積分不変式はここでは明らかに

$$\int\pi=\int r'\delta r-\left(\frac{1}{2}r'^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{C}^2}{r^2}-\mathrm{U}\right)\delta t$$

に帰着される。

形式 π は r, r' および t のみに関係し，その特性方程式の一つは

$$\frac{dr}{dt}=r'$$

である。これから，もし初期の条件として値 r_0 および t_0 を与え，終りの条件として値 r_1 および t_1 を与えれば，実際の運動は，端において同じ条件を満足し，面積定数Cをもって面積定理を満足する，無限に近いすべての運動に対して，積分

$$I=\int_{t_0}^{t_1} r'dr-\left(\frac{1}{2}r'^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2}-U\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2}-U\right]dt$$

を定常ならしめる運動である。

IV　等質媒質内の光の伝播への応用

191. 屈折率が各点で知られている等質媒質を考えよう。Fermat の原理によれば，光線は積分

$$\int nds=\int n\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

の極値曲線として定義される。

一つの補助変数 t を導入すれば，結局積分

$$\int F(x,\ y,\ z;\ x',\ y',\ z';\ t),$$

ただし

$$F=n\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

の場合が問題になっているわけである。

光線が特性曲線となるような相対一次積分不変式 $\int\omega$ は，公式

$$\omega=\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z-\left(x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial z'}-F\right)\delta t$$

で定義される。これはここでは

$$\omega=n\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\delta x+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\delta y+\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\delta z\right),$$

またはさらに

$$\omega=n(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)$$

となる。ただしここに α, β, γ は，任意の方向の方向余弦を表わす。したがって形式 ω は，実際には五つの変数に関係する。その特性方程式を作り，これらがとくに方程式

$$\frac{dx}{\alpha}=\frac{dy}{\beta}=\frac{dz}{\gamma}$$

を含むことは容易に示される。

方向 (α, β, γ) は，明らかに考えている光線への接線に他ならない。

192. $\int\omega$ が一つの相対積分不変式であるという性質から，光線束のつぎの性質が導かれる。すなわち，もしこの光線束をかこむ一つの閉曲線 (C) を描けば，この曲線にそっての積分 $\int n\cos\theta\delta s$ は選ばれた曲線 (C) に無関係である。ただしここに θ は，(C) の点 M における接線と，M を通る光線への接線とのなす角である。一つの光線叢の光線がすべて同一曲面の法線であるために必要かつ十分な条件は，この光線叢中にとられたすべての光線束に対してこの積分が 0 になることであるのが容易に証明される。これは，一つの曲面に垂直な光線叢の光線はまた無限に多くの曲面に垂直であるという，Malus の定理に対応する。こうなるための条件は，外二次形式 ω' が 0 である，またはさらに正確に言えば，交代双一次形式 $\omega'(d, \delta)$ が，δ を光線叢の媒介変数の一つに関する微分の記号であり，δ' を他の媒介変数に対する微分の記号であるとみなせば，0 であることである。

考えている媒質内を伝播する光線は，四つの媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 に関係する。これらの媒介変数に対して施された変換であって，一つの曲面に垂直なあらゆる光線叢を，やはり一つの曲面に垂直な他の光線叢にかえる変換を，Malus の変換とよぶ。すでに知っているように，形式 ω' は u_i とその微分とを用いて表わし得られる。最も一般な Malus の変換は，明らかに方程式

$$\omega'(u', du') = k\omega'(u, du)$$

で定義される。ただしここに k は一つの未知関数である。この両辺を外微分すれば，直ちに

$$[dk\omega'] = 0$$

が得られる。ところが ω' は階数4であるから，上の式は $dk=0$，すなわち k が一つの定数であるときにのみ可能である。したがって求める変換は，一次形式

$$\omega(u', du') - k\omega(u, du)$$

が一つの完全微分であることを書き表わして，すなわち

$$n(x', y', z')(\alpha' dx' + \beta' dy' + \gamma' dz') = kn(x, y, z)(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) + dV$$

から得られる。

たとえば，光線を，これが xy 平面を貫く点の座標 (x_0, y_0) と，この点における接線の方向余弦 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ とで定義しよう。そうすれば

$$n(x_0' \; y_0', 0)(\alpha_0' dx_0' + \beta_0' dy_0') - kn(x_0, y_0, 0)(\alpha_0 dx_0 + \beta_0 dy_0) = dV$$

を得る。

第一の場合。x_0', y_0', x_0, y_0 の間になんらの関係もない場合。この場合には V は x_0, y_0, x_0', y_0' の定まった関数であり，したがってわれわれは

$$-kn(x_0, y_0, 0)\alpha_0 = \frac{\partial V}{\partial x_0}, \qquad -kn(x_0, y_0, 0)\beta_0 = \frac{\partial V}{\partial y_0},$$

$$n(x_0', y_0', 0)\alpha_0' = \frac{\partial V}{\partial x_0'}, \qquad n(x_0', y_0', 0)\beta_0' = \frac{\partial V}{\partial y_0'}$$

を得る。

最初の二つの方程式は x_0' および y_0' を与え，つぎの二つの方程式は α_0' および β_0' を与える。

第二の場合。x_0, y_0, x_0', y_0' の間に一つ，そしてただ一つの関係がある場合。

$$F(x_0, y_0; x_0', y_0') = 0$$

をこの関係式とする。V で x_0, y_0, x_0', y_0' の任意の関数を表わし，一つの補助の媒介変数 λ を導入すれば，われわれは

$$-kn(x_0,\ y_0,\ 0)\alpha_0=\frac{\partial V}{\partial x_0}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_0},\qquad -kn(x_0,\ y_0,\ 0)\beta_0=\frac{\partial V}{\partial y_0}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_0},$$

$$n(x_0',\ y_0',\ 0)\alpha_0'=\frac{\partial V}{\partial x_0'}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_0'},\qquad n(x_0',\ y_0',\ 0)\beta_0'=\frac{\partial V}{\partial y_0'}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y_0'}$$

を得る。

これら四つの方程式の最初の二つに，方程式 $F=0$ を加えたものが x_0', y_0', および λ を与える。つぎに後の二つは α_0' および β_0' を与える。

第三の場合。x_0' および y_0' が x_0, y_0 の定まった関数である場合。すなわち

$$x_0'=f(x_0,\ y_0),\quad y_0'=g(x_0,\ y_0)$$

である場合。この場合 V は x_0, y_0 の関数であって，われわれは

$$n(x_0',\ y_0',\ 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial x_0}+\beta_0'\frac{\partial g}{\partial x_0}\right)=kn(x_0,\ y_0,\ 0)\alpha_0+\frac{\partial V}{\partial x_0},$$

$$n(x_0',\ y_0',\ 0)\left(\alpha_0'\frac{\partial f}{\partial y_0}+\beta_0'\frac{\partial g}{\partial y_0}\right)=kn(x_0,\ y_0,\ 0)\beta_0+\frac{\partial V}{\partial y_0}$$

を得る。これらは α_0' および β_0' を定める方程式である。

193. 形式 ω' は不変形式である。そしてわれわれは上に，光線束に対してはこの形式が恒等的に 0 であるという，光線束に特有な性質をみた。不変形式 $\frac{1}{2}\omega'^2$ は光学に応用をもっている。その式を展開すれば

$$\frac{1}{2}\omega'^2=n[\delta n(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)(\delta\alpha\delta x+\delta\beta\delta y+\delta\gamma\delta z)]$$
$$-n^2([\delta\beta\delta\gamma\delta y\delta z]+[\delta\gamma\delta\alpha\delta z\delta x]+[\delta\alpha\delta\beta\delta x\delta y])$$

である。

たとえば，与えられた面素 $d\sigma$ を横切り，これを横切る点における接線が，無限に小さな開き $d\omega$ をもった円錐内の直線に平行であるような，すべての光線束をとろう。考えている光線は，四つの媒介変数 u_1, u_2, u_3, u_4 に関係する。その始めの二つはたとえば面素 $d\sigma$ を横切る点の位置を定義し，後の二つはこの点における接線の向きを定義する。対応する横截点 $(x,\ y,\ z)$ とこの点における接線の方向余弦 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ とで定められる状態を各光線上にとろう。最初

の三つの量 x, y, z は u_1 と u_2 にしか関係しないのであるから，δx, δy, δz に関するあらゆる外三次形式は 0 である。したがって不変量 $\frac{1}{2}\omega'^2$ は，符号を別にすれば

$$\frac{1}{2}\omega'^2=n^2([\delta\beta\delta\gamma\delta y\delta z]+[\delta\gamma\delta\alpha\delta z\delta x]+[\delta\alpha\delta\beta\delta x\delta y])$$

となる。

さて，面素 $d\sigma$ への法線の方向余弦を λ, μ, ν で表わせば，われわれは

$$[\delta y\delta z]=\lambda d\sigma,\quad [\delta z\delta x]=\mu d\sigma,\quad [\delta x\delta y]=\nu d\sigma,$$
$$[\delta\beta\delta\gamma]=\alpha d\omega,\quad [\delta\gamma\delta\alpha]=\beta d\omega,\quad [\delta\alpha\delta\beta]=\gamma d\omega,$$

したがって

$$\frac{1}{2}\omega'^2=n^2(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)d\sigma d\omega=n^2\cos\theta d\sigma d\omega$$

を得る。ここに θ は，曲面への法線と，この曲面を横切る光線の（平均）方向との角を表わすものである。

さて，もし四つの媒介変数に関係する光線の任意の集合を考えるならば，各光線の上に，この光線が一つの与えられた曲面 (S) を貫く点をとることができる。この同じ点を通るすべての光線は一つの円錐体を作り，与えられ集合に関する積分不変式 $\int\frac{1}{2}\omega'^2$ は，公式

$$\mathrm{I}=\int n^2\cos\theta d\sigma d\omega$$

で与え得られる。ただしここに $d\sigma$ は曲面 S の面素を表わし，$d\omega$ は S の同一点から出発して S への法線と角 θ をなす光線で作られた基本円錐の開きを表わすものである。

たとえば一つの閉曲面 (S) で限られた立体を横切るすべての光線の集合をとろう。そして各光線をこれが立体を出る点でとろう。そうすればわれわれはこの集合に対して

$$\mathrm{I}=\int n^2d\sigma\int\cos\theta d\omega$$

を得る。

さて積分 $\int \cos\theta d\omega$ は，座標として半径１の球面上の経度 φ と余緯度 θ をとれば，半球 $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ 上でとった積分

$$\iint \sin\theta \cos\theta \, d\theta d\varphi$$

に等しい。したがってこれは π に等しい。したがってわれわれは

$$\mathrm{I} = \pi \iint n^2 d\sigma$$

を得る。

もし媒質が屈折率１のものであれば，光線は直線を描き，積分Ｉは曲面の面積に π をかけた積に等しい。

194. 第16章で説明した一般積分法の応用として，屈折率 n が直角座標の一つ z にしか関係しないような等質媒質内の光線の歩みを決定してみよう。ここにわれわれは不変形式 ω' とともに，Ox に平行な併進，Oy に平行な併進，Oz のまわりの回転に対応する三つの無限小変換

$$\mathrm{A}_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathrm{A}_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathrm{A}_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

を知っている。

これら三つの変換は形式

$$\omega_\delta = n(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z)$$

を不変にするから，三つの一次不変形式 $\omega'(\delta, \mathrm{A}_i)$ は

$$\delta\omega(\mathrm{A}_1) = \delta(n\alpha),$$

$$\delta\omega(\mathrm{A}_2) = \delta(n\beta),$$

$$\delta\omega(\mathrm{A}_3) = \delta[n(\beta x - \alpha y)]$$

となる。

したがってわれわれは三つの第一積分

$$n\alpha, \quad n\beta, \quad n(\beta x - \alpha y)$$

を得る。

$$n\alpha=a,\quad n\beta=b,\quad bx-ay=c$$

とおこう。最後の関係式は，すべての光線が Oz に平行な平面内にあることを示している。したがって

$$\omega_\delta=\delta\left(ax+by+\int\sqrt{n^2-a^2-b^2}dz\right)$$
$$-\left(x-a\int\frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}\right)\delta a-\left(y-b\int\frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}\right)\delta b$$

を得る。

したがってわれわれは，光線の軌道に対して，

$$x=a\int\frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}+a',\quad y=b\int\frac{dz}{\sqrt{n^2-a^2-b^2}}+b'$$

を得る。

第 19 章

Fermat の原理と光学の不変 Pfaff 方程式

I　Fermat の原理

195. 前章においてわれわれは，等質媒質の光学の積分不変式を，屈折率は時間に無関係であると仮定して考察した。

こんどは任意の媒質をとって，そのなかでは光波の伝播は，dx, dy, dz, dt に関して斉次な Monge の方程式

(1)
$$F(x, y, z, t; dx, dy, dz, dt)=0$$

で定義されると仮定しよう。これは，点 (x, y, z) で瞬間 t に出された光信号から放射される波は，瞬間 $t+dt$ に方程式

$$F(x, y, z, t; X-x, Y-y, Z-z, dt)=0$$

をもっていることを意味する。

点 (x, y, z) および瞬間 t に関する波面は，すでに知っているように，方程式

$$F(x, y, z, t; X-x, Y-y, Z-z, 1)=0$$

をもっている。

このような媒質内で光線は，x, y, z として，方程式 (1) を満足し，さらに Fermat の原理とよばれるものを形成する付加的な条件を満足する，t の三つの関数をとって定義される。方程式 (1) を満足するあらゆる曲線のうちで，またはよく言うように，Monge の方程式 (1) のあらゆる積分曲線のうちで，与えられた点 (x_0, y_0, z_0) から瞬間 t_0 に出て，与えられた点 (x_1, y_1, z_1) を通る光線は，光が最初の点から第二の点へいくのに要する時間 t_1-t_0 を最小ならしめる曲線である。言いかえれば，光線は Monge の方程式 (1) で定義される

Mayer の問題の極値曲線である。

196. Fermat の原理から，光線を定義する微分方程式がいかに作成されるかを簡単に思い出そう。瞬間 t_0 に点 (x_0, y_0, z_0) を出て，瞬間 t_1 に点 (x_1, y_1, z_1) に終わる一つの光線を想像しよう。方程式 (1) の，光線に無限に近い任意の積分曲線が一つ与えられたとすれば，光線に対しても，また積分曲線に対しても，x, y, z, t は一つの媒介変数 u の関数として表わされていると想像することができる。ここにこの媒介変数の値 0 および 1 は，光線に対しては瞬間 t_0 および瞬間 t_1 に対応するものとする。

$$x+\delta x,\quad y+\delta y,\quad z+\delta z,\quad t+\delta t$$

を変化した曲線に対する u の関数とする。方程式 (1) を

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ x',\ y',\ z',\ t')=0 \tag{2}$$

の形に書き，のちこれを変化させてわれわれは

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t}\delta t+\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z'+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t'=0$$

を得る。

λ を u の不定の関数として，この最後の方程式の左辺に λdu をかけて 0 から 1 まで積分しよう。そうすればわれわれは

$$\int_0^1\Big[\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\delta z+\lambda\frac{\partial F}{\partial t}\delta t$$
$$+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\delta\frac{dx}{du}+\lambda\frac{\partial F}{\partial y'}\delta\frac{dy}{du}+\lambda\frac{\partial F}{\partial z'}\delta\frac{dz}{du}+\lambda\frac{\partial F}{\partial t'}\delta\frac{dt}{du}\Big]du=0,$$

または部分積分を行なって

$$\begin{cases}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\dfrac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\dfrac{\partial F}{\partial z'}\delta z+\dfrac{\partial F}{\partial t'}\delta t\right)\right]_0^1\\ \quad+\displaystyle\int_0^1\left\{\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\delta x+\cdots+\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right]\delta t\right\}du=0\end{cases} \tag{3}$$

を得る。

もし光線に近い積分曲線が与えられた最初の条件と最後の条件を満足すれば

$$(\delta x)_0=(\delta y)_0=(\delta z)_0=(\delta t)_0=(\delta x)_1=(\delta y)_1=(\delta z)_1=0$$

である。したがって

$$\lambda_1\left(\frac{\partial F}{\partial t'}\right)_1(\delta t)_1+\int_0^1\left\{\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right]\delta x+\cdots\right.$$
$$\left.+\left[\lambda\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{d}{du}\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial t'}\right)\right]\delta t\right\}du=0$$

である。

区間の両端で0にさえなれば，われわれは関数 $\delta x, \delta y, \delta z$ を任意に与えることができる。さて関数 λ を，記号 $\int$ 内の量における δt の係数が0であるという条件で定めよう。$(\delta t)_1$ が，変化した積分曲線がどうあろうとも 0 になるためには，記号 $\int$ 内の量における $\delta x, \delta y, \delta z$ の係数もまた 0 になることが必要にしてかつ十分である。

言いかえれば，補助の量 λ を導入すれば，光線は方程式 (2) に方程式

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{du}\left(\lambda\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)=0, \\ \lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{du}\left(\lambda\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0, \\ \lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{du}\left(\lambda\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)=0, \\ \lambda\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{d}{du}\left(\lambda\dfrac{\partial F}{\partial t'}\right)=0 \end{cases}$$

を付加したもので与えられる。

さらに λ を消去すれば，方程式 (2) のほかに三つの方程式

$$(4')\quad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial x'}}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial z'}}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\partial F}{\partial t'}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial t'}}$$

が与えられる。これに

$$\frac{dx}{du}=x',\quad \frac{dy}{du}=y',\quad \frac{dz}{du}=z',\quad \frac{dt}{du}=t'$$

を加えておくのが便利である。

方程式 (2) を u に関して微分したものと方程式 (4′) とは，$\frac{dx'}{du}$, $\frac{dy'}{du}$, $\frac{dz'}{du}$, $\frac{dt'}{du}$ を四つの一次方程式で与え，これから導かれる値は u に関係しないのがすぐにみられる。自然なことではあるが，媒介変数 u はしたがって，最後の方程式に外見上はいってくるだけである。この最後の方程式は

$$\frac{du}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dz}{z'}=\frac{dt}{t'}=\frac{dx'}{\mathrm{X}}=\frac{dy'}{\mathrm{Y}}=\frac{dz'}{\mathrm{Z}}=\frac{dt'}{\mathrm{T}}$$

の形をしている。ただしここに X, Y, Z, T は，$x, y, z, t, x', y', z', t'$ の定まった関数であり，x', y', z', t' に関しては二次の斉次関数であり，しかも

$$x'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+y'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}+z'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}+t'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\mathrm{X}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}+\mathrm{Y}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}+\mathrm{Z}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}+\mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}=0$$

を満足する。

実際には，光線の微分方程式は x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ に関する一階常微分方程式である。ただしここにこれら七つの量は関係式 (2) で結ばれていると考える。

II　光学における不変 Pfaff 方程式

197. こんどは一つの媒介変数 α に関係する光線の簇を考えて，α に関係し，かつ α とともに変わる出発点 (x_0, y_0, z_0)，およびやはり α とともに変わる到達点 (x_1, y_1, z_1) に対応する，時間 (t_0, t_1) 内におけるこれらの光線のおのおのをとろう。もし各光線に対して，方程式 (4) 中にはいってくる補助関数を λ で表わし，これに公式 (3) をあてはめれば，われわれは

$$\lambda_1\left[\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}\right)_1\delta x_1+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\right)_1\delta y_1+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\right)_1\delta z_1+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}\right)_1\delta t_1\right]$$
$$=\lambda_0\left[\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}\right)_0\delta x_0+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\right)_0\delta y_0+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\right)_0\delta z_0+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}\right)_0\delta t_0\right]$$

を得る。

これから，(2) で結ばれた x, y, z, t, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$ に関する一階微分方程式系と考えられた，光線の微分系は，不変 Pfaff 方程式

$$\omega_\delta \equiv \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}\delta t=0$$

を許容することがわかる。

やはり x', y', z', t' の互いの比にしか関係しないこの Pfaff の方程式は，結局 6 変数である。その特性系は一つの常微分方程式系であって，したがって光線の方程式に同等なものでしかあり得ない。

したがってわれわれは，光線は Pfaff の方程式

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}\delta t=0 \tag{5}$$

の特性曲線であるという結論に達する。

これが光学の不変 Pfaff 方程式である。

198. 実際には，Monge の方程式 (1) は

$$\Omega\left(x,\ y,\ z,\ t;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right)\equiv \mathrm{F}\left(x,\ y,\ z,\ t;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},\ 1\right)=0$$

の形に書かれる。

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x},\quad \frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad \frac{dz}{dt}=\dot{z}$$

とおけば，不変 Pfaff 方程式を作るのは容易である。実際

$$x'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}+y'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}+z'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}+t'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t'}=0$$

である。したがって方程式 (5) は，

$$t'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}\delta x+t'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}\delta y+t'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\delta z-\left(x'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}+y'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}+z'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'}\right)\delta t=0$$

と書かれ得る。

この左辺は x', y', z', t' に関して斉次であるから，これらの変数をそれぞれ

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, 1 でおきかえることができる。したがって不変 Pfaff 方程式に対して形式

(6) $$\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}\delta x+\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}}\delta y+\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\delta z-\left(\dot{x}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}}+\dot{y}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{y}}+\dot{z}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{z}}\right)\delta t=0$$

を得る。

たとえば，波面が一つの球になるような媒質をとり，$\frac{c}{n}$ を光の伝播速度としよう。ただしここに c は真空中の光の速度であり，n は（x, y, z, t の関数である）屈折率である。ここでは Monge の方程式は

$$n^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-c^2=0$$

であり，不変 Pfaff 方程式は

$$n^2(\dot{x}\delta x+\dot{y}\delta y+\dot{z}\delta z)-c^2\delta t=0$$

である。

$$\alpha=\frac{n\dot{x}}{c},\quad \beta=\frac{n\dot{y}}{c},\quad \gamma=\frac{n\dot{z}}{c}$$

とおけば，上式は

$$n(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)-c\delta t=0$$

となる。この場合 α, β, γ は，光線への接線の方向余弦である。

もし n が時間に関係しないならば，光の伝播法則は無限小変換 $\frac{\partial f}{\partial t}$ を許容し，したがって光線を与える微分方程式は不変形式

$$\delta t-\frac{n}{c}(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)$$

を許容する。

光線によって描かれる（幾何学的）曲線を与える微分方程式は，したがって相対積分不変式

$$\int n(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)$$

を許容する。こうして前章の見地が見いだされる（第191項）。

199. 光学の不変 Pfaff 方程式の特性方程式は，すでに知っているように，一つの一階偏微分方程式の特性方程式に直され得る(第152項)。(逆もまた真であるが，この問題にはふれないことにする。)

光の伝播法則が一つの無限小変換を許容するごとに，一つの積分不変式の存在が保証される。これらのいかなる場合にも，光線の研究はふつうの変分法の問題に直される。

たとえば，光の伝播法則が Monge の方程式

$$n^2(dx^2+dy^2+dz^2)-c^2dt^2=0$$

で与えられる場合をとろう。ただしここに屈折率は，x, y, t には関係するが，z には関係しないとする。この場合には無限小変換

$$\mathrm{A}f=\frac{\partial f}{\partial z}$$

を得る。そして形式

$$\frac{\omega(\delta)}{\omega(\mathrm{A})}=\frac{n(\alpha\delta x+\beta\delta y+\gamma\delta z)-c\delta t}{n\gamma}=\delta z+\frac{\alpha}{\gamma}\delta x+\frac{\beta}{\gamma}\delta y-\frac{c}{n\gamma}\delta t$$

は一つの不変形式である。座標 x, y が一度 t の関数として知られれば，z は一つの求積で求められる。x および y を t の関数として与える微分方程式は，相対積分不変式

$$\int\frac{\alpha}{\gamma}\delta x+\frac{\beta}{\gamma}\delta y-\frac{c}{n\gamma}\delta t,$$

または同じことであるが，積分不変式

$$\int\xi\delta x+\eta\delta y-\zeta\delta t$$

を許容する。ただしここに ξ, η, ζ は関係式

$$1+\xi^2+\eta^2=\frac{n^2}{c^2}\zeta^2$$

で結ばれた三つの量である。

特性曲線の方程式は，とくに方程式

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dt}{\frac{n^2}{c^2}\zeta}=\frac{\sqrt{dt^2-\frac{n^2}{c^2}(dx^2+dy^2)}}{\frac{n}{c}}$$

を含んでいる。

したがって光線は，積分

$$\int -\xi dx-\eta dy+\zeta dt=\int\sqrt{\frac{c^2}{n^2}dt^2-dx^2-dy^2}$$

を定常ならしめる。

III 時空の標定と無関係な Fermat の原理

200. 光学の不変 Pfaff 方程式は，光の伝播法則を定義する Monge の方程式と，時間および空間の標定とは関係なく結ばれていることに注意することが大事である。言いかえれば，方程式

$$\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z+\frac{\partial F}{\partial t'}\delta t=0$$

は，x, y, z, t に対して施されるあらゆる変数変換に対して，方程式

$$F(x,\ y,\ z,\ t;\ x',\ y',\ z',\ t')=0$$

と共変である。これは結局 Fermat の原理自身から導かれる。しかしながらこの方程式はまた，変数 x, y, z, t を互いに区別しないつぎの方法によっても得られる。

Pfaff 系

$$\frac{dx}{x'}=\frac{dy}{y'}=\frac{dz}{z'}=\frac{dt}{t'} \tag{7}$$

を考えよう。ただしここに $x, y, z, t, \frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$ は方程式 (2) で結ばれていると仮定する。そして (7) の導 Pfaff 系をさがそう。方程式 (7) の一次結合である Pfaff 方程式から作られており，その左辺の外微分が方程式 (7) を考慮に入れれば 0 になるという性質をもった Pfaff 系を，導 Pfaff 系とよぶのであ

る。上のように，

$$\frac{x'}{\dot{x}}=\frac{y'}{\dot{y}}=\frac{z'}{\dot{z}}=\frac{t'}{1}$$

とおけば，方程式 (7) の一次結合はすべて

$$u(dx-\dot{x}dt)+v(dy-\dot{y}dt)+w(dz-\dot{z}dt)=0$$

という形である。もし方程式 (7) を考慮に入れれば，左辺の外微分は

$$[dt(ud\dot{x}+vd\dot{y}+wd\dot{z})]$$

となる。方程式 (7) と，方程式 (2) を微分したものとを考慮に入れたときこれが 0 になるための条件は

$$[dt(ud\dot{x}+vd\dot{y}+wd\dot{z})(dx-\dot{x}dt)(dy-\dot{y}dt)(dz-\dot{z}dt)d\mathrm{F}]=0,$$

または簡単にして

$$\left[dxdydzdt(ud\dot{x}+vd\dot{y}+wd\dot{z})\left(\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{x}}d\dot{x}+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{y}}d\dot{y}+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{z}}d\dot{z}\right)\right]=0$$

である。

これは

$$\frac{u}{\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{x}}}=\frac{v}{\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{y}}}=\frac{w}{\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{z}}}$$

を与える。

したがって系 (7) の導系は単に Pfaff の方程式

$$\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{x}}(dx-\dot{x}dt)+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{y}}(dy-\dot{y}dt)+\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial\dot{z}}(dz-\dot{z}dt)=0$$

である。この特性曲線は光線である。

これから，光学においてさえも，座標としての時間は空間座標が演ずる役割と本質的に異なる役割を演ずるものではないことがわかる。光学における基本的な法則は，必ずしも空間と時間の古典的な概念には結ばれておらず，相対性理論におけるようなものであると考えられる。

201. たとえば，宇宙 (時空) に対して適当な標定を選べば，(点になった) た

だ一つの質量によって起こされる重力場における光の伝播法則は，Schwarzschild の方程式

$$\frac{dr^2}{1-\dfrac{2m}{r}}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2=0$$

で与えられる。これらの法則は無限小変換 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ を許容する。したがって空間的な見地からのみ考えられた光線は，積分

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^2}+\frac{r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)}{1-\dfrac{2m}{r}}}$$

の極値を実現するものとして定義される。

伝播は，引力の中心を通る平面内で行なわれる。したがってもしこの平面が $\varphi=0$ で定義されると仮定すれば，積分

$$\int\sqrt{\frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^2}+\frac{r^2d\theta^2}{1-\dfrac{2m}{r}}}$$

の極値を実現しなければならない。

無限小変換 $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ の存在を利用すれば，積分はなんらの困難もひき起こさず，

$$\theta=\int\frac{C\dfrac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\dfrac{C^2\left(1-\dfrac{2m}{r^2}\right)}{r^2}}}$$

を与える。

文　献　表

H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, 第III巻, Paris, Gauthier-Villars, 1899.

P. Appell: *Traité de Mécanique rationnelle*, 第II巻, 第XXV章, Paris, Gauthier-Villars.

H. Poincaré: *Sur les résidus des intégrales doubles;* Acta Math. 第IX巻, 1887, 321頁～380頁.

——: *Analysis situs;* Journal Ec. Polyt., 1895.

Th. de Donder: *Etude sur les invariants intégraux*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 第XV巻 (1901), 66頁～131頁; 第XVI巻 (1902), 155頁～179頁.

——: *Sur les invariants intégraux*, Atti del IV^e Congresso internazionale dei Matematici, 第II巻, Roma, 1909, 129頁～137頁.

——: *Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé*, Bulletin de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), 1908, 795頁～811頁.

——: *Sur les invariants intégraux relatifs*, 同上, 1909, 66頁～83頁.

——: *Applications du multiplicateur généralisé*, 同上, 1909, 610頁～621頁.

——: *Sur le multiplicateur généralisé*, 同上, 268頁～286頁.

——: *Sur les invariants intégraux relatifs et leurs applications à la Physique mathématique*, 同上, 1911, 50頁～70頁.

——: *Quelques remarques sur le multiplicateur de Jacobi et le multiplicateur généralisé*, 同上, 1911, 740頁～749頁.

——: *Introduction à la théorie des invariants intégraux*, 同上, 1913, 1043頁～1073頁.

——: *Applications nouvelles des invariants intégarux*, Mémoires de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences) (2), I, (1904).

——: *Sur les équations canoniques de Hamilton-Volterra*, 同上 (2), III.

G. Kœnigs: *Application des invariants intégraux à la réduction au type canonique d'un système quelconque d'équations différentielles*, C. R. Acad. des Sc. Paris, 第CXXI巻, (1895), 875頁～878頁.

——: *Sur les invariants intégraux*, 同上, 第CXXII巻, (1896), 25頁～27頁.

S. Lie: *Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen*, Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania, 1902, 第1号, 73頁.

K. Zorawski: *Über gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale*, Bull. Acad. des sciences de Cracovie (sc. math. et natur.), 1909, 483頁～542頁.

R. Hargreaves: *Integral forms and their connexion with physical equations*, Trans. Cambridge Philosoph. Society, 第XXI巻 (1912), 107頁～122頁.

R. Dontot: *Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes*, Bull. Soc. Math. de France, 第XLII巻 (1914), 53頁～91頁.

E. Vessiot: *Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique*, 同上, 142頁～167頁.

——: *Sur un invariant intégral de l'Hydrodynamique et son application à la relativité*, C. R. Acad. des Sc. de Paris, 1918, 12月30日.

E. Goursat: *Sur les invariants integraux*, Journal Math. pures et appliquées (5), 第IV巻 (1908), 331頁～365頁.

——: *Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux*, 同上, (7) 第I巻 (1915), 241頁～259頁.

——: *Sur certaines systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du problème de Pfaff*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 第VII巻 (1915).

E. Cartan: *Sur l'intégration des systèmes différentiels complètement intégrables*, C. R. Acad. des Sc. Paris, 第CXXXV巻 (1902), 1415頁～1417頁; 1564頁～1566頁.

T. Chella: *Vantaggiche si possono trarre da noti invarianti integrali e differenziali in alcuni problemi d'integrazione*, Annali R. Scuola norm. sup. Pisa (sc. fis.-mat.), 第XI巻 (1910), 1頁～137頁.

外微分形式にあてはめうるいわゆる記号的計算，およびこれに関係のあるいくつかの記号的計算については，上の論文以外につぎの論文を参考にすることができる。

E. Cartan: *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Ann. Ec. Norm., (3) 第XVI巻 (1899), 239頁～332頁.

A. Buhl: *Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes*, Ann. Fac. Sc. Toulouse, 第IV巻 (1912); 第VI巻 (1914); 第VII巻 (1915).

最後に，その見地が H. Poincare のそれとは少しく異なる，連続変換群の積分不変式に関する主題については，つぎの論文を参照することができる。

S. Lie: *Die Theorie des Integralinvarianten ist ein Corollar der Theorie der Differentialinvarianten*, Ber. Sächs. Gesellsch., Leipzig, 1897, 342頁～357頁.

——: *Über die Integralinvarianten und ihre Verwertung für die Theorie der Differentialgleichungen*, 同上, 1897, 369頁～410頁.

K. Zorawski: *Über Integralinvarianten der continuierlichen Transformationsgruppen,* Bull. Acad. Sc. Cracovie (sc. math. et natur.), 1895, 127頁～130頁.

E. Cartan: *Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé,* Bull. Soc. Math. France, 第XXIV巻 (1896), 140頁～177頁.

Th. de Donder: *Sur un problème relatif aux invariants intégraux,* Bull. Acad. royale de Belgique (classe des sc.), 1912, 583頁～590頁.

R. Deltheil: *Sur la théorie des probabilités géométriques,* thèse, Toulouse, Ed., Privat, 1920.

訳者のことば

この書物は，もはや古典ともいえる，エリー・カルタン (Elie Cartan) の名著『積分不変式講義』(*Leçons sur les invariants intégraux,* Hermann, Paris, 1922) の忠実な全訳です。

この書物が，アンリ・ポアンカレ (Henri Poincaré) によって創始され，エリー・カルタンによって拡張された積分不変式論の書物として有名なのはもちろんですが，この書物はまた，エリー・カルタンによって完成され，エリー・カルタンによって数学のほとんどすべての分野に応用された外微分形式の解説書としても非常に有名です。

エリー・カルタンは，この書物につづいて，いずれも名著といわれるつぎのような書物を発表しています。

『リーマン幾何学講義』(*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann,* Gauthier-Villars, Paris, 1928)

『射影接続空間論講義』(*Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Gauthier-Villars, 1937)

『動座標系の方法による，有限次元連続群論と微分幾何学』(*La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile,* Gauthier-Villars, 1937)

これらの書物のなかでは，いつも外微分形式の理論が縦横に使われています。したがってエリー・カルタンは，外微分形式の理論とその幾何学への応用を説いたつぎの書物も書いています。

『外微分系とその幾何学への応用』(*Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques,* Hermann, Paris, 1945)

この外微分形式の重要性は，最近のホッジ (W. V. D. Hodge)，ドゥ・ラーム (G. de Rham) などの画期的な仕事からもうかがわれます。たと

えばつぎの二著は，主として調和形式とよばれる外微分形式に関するものです。

W. V. D. ホッジ，『調和積分の理論と応用』(W. V. D. Hedge, *Theory and applications of harmonic integrals,* Cambridge, 1952)

G. ドゥ・ラーム，『微分可能集合体，微分形式，クーラン，調和形式』(G. de Rham, *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques,* Hermann, Paris, 1955)

このように，外微分形式の重要性はますます明らかになってきましたので，1922年に初版の発行された本書の重要性も再認識され，しかも，初版のままで，40年もたったいまでもまだそのまま十分に役に立つという意味で，初版そのままの再版が，1958年に出版されています。その意味でわたくしは本書の訳題を『外微分形式の理論―積分不変式―』としておきました。

なお，最も新しく出版された外微分形式の書物で，しかも非常に評判のよい書物に，

フランダース，『微分形式とその物理学への応用』(H. Flanders, *Differential forms with applications to the physical sciences,* Academic Press, 1963)

があります。

なお，このような新しい書物では，外微分形式 α と β の外積を，

$$[\alpha\beta] \quad \text{の代りに} \quad \alpha\wedge\beta,$$

外微分形式 α の外微分を，

$$\alpha' \quad \text{の代りに} \quad d\alpha$$

と書いています。

本書の訳に誤りが少なく，外微分形式の理論を知り，その応用を目指す人々のために十分役立つことを心から祈るものです。

昭和39年10月27日

矢　野　健　太　郎

訳者略歴

1912年生．1934年東大理学部数学科卒．微分幾何学専攻．
東京工大教授．理学博士．パリ大学博士．
著書「接続の幾何学」，「微分幾何学」，「Curvature and Betti numbers」．
訳書「新しい数学」，「新しい数学の構造」．

外微分形式の理論

¥1300

1964年11月5日印刷
1964年11月15日発行

訳者 © 矢野健太郎（やのけんたろう）
発行者 草野貞之
印刷所 東洋経済新報社
発行所 東京都千代田区神田小川町3の24 電話東京(291)7811〜5 振替東京33228 株式会社白水社

松岳社製本

バーコフ，マックレーン著　奥川光太郎・辻　吉雄訳

改訂新版 **現代代数学概論**　A５判　518頁　クロス装¥1500

抽象代数学をもっとものみこみやすく書かれていて，しかも抽象数学の生命である論理的明快性に関しては少しのゆるみもないといわれる最適の入門書．理工農医にわたる理科系学科，数理経済学・数理哲学・論理学など学ぶ学生の方々が代数学を学ぶのに最適の，時代の要請に応ずる新しい形式の教科書中出色の名著．

M. H. A. ニューマン著　中江龍夫・辻　吉雄訳

位相数学序論 主として平面点集合の　A５判　244頁　クロス装 ¥780

今日の数学を理解し研究するには Topology の基本を解することなしではほとんど不可能だといわれる．本書はその絶好の入門書で，クラシカルな問題とモダンな問題との橋渡しとし，抽象的方法と具体的面，集会論的方法と代数的方法との関連にまで話を進め，位相数学の多くの重要概念を具体的例と結びつけて解説する．

エミール・ボレル著　平野次郎訳

一般集合論　A５判　322頁　クロス装 ¥800

集合論の初歩を分りやすく説いた入門書，単なる「集合論初歩」のみにとどまらず，測度論や確率論，ことにいわゆる可付番確率論にもわたり，ボレル一流の経験論的立場から一貫して書かれているので，専門的にみてもきわめて興味深い．十分広い数学的教養をもつ人にも最近の集合論や関数論を学ぶ準備として好適．

マルセル・ボル著　弥永昌吉・矢野健太郎訳

万能数値表　A５判　890頁　クロス装¥3000

理工学・人文科学等の計算・解析に関するあらゆる要求を満たす．大小幾百の材料をとり要約，箇々の材料をして直ちに内容を語らせるようにしてある．さらに計算図表・グラフ等を載録して利用度を一層高くしている．数字が正確で信頼できる，数表は見やすい特別な活字を使用している，徹底した親切さなど，他に比をみない．

文庫クセジュ――――――――――クセジュ判（17.5×11.5cm）

現代代数学　ケイザンヌ他著　芹沢正三訳　¥180

解析学　ドラシェ著　宮本・森田訳　¥180